m/ testa

C. E. N. D. E. S.

Introducción al Estudio de la PROGRAMACION LINEAL

Prof. E. Valenzuela

Caracas - Venezuela
1963

Bibliografía.

(1) Linear Programming and Economic Analysis
Dorman, Samuelson and Solow
Rand Series McGraw-Hill (1958)

(2) Theory of Games and Linear Programming
S. Vajda
Methuen's Monograph on Physical Subjects (1956)

(3) Cowles Commission
Monograph N° 13 (1951)

(4) An Introduction to Linear Programming
Charnes, Cooper and Honderson. N.Y. and London (1953)

(5) Programación Lineal
E. Cansado (CIEF) (1957)

(6) Programación Lineal su Fundamento Matemático
E. Valenzuela (CIEF) (1957)

(7) Linear Programming, Methods and Applications
S.I. Gass
N.Y. Mc-Graw-Hill (1958)

(8) Linear Programming
R.O. Ferguson and L.F. Sargent
N.Y. Mc-Graw-Hill (1958)

(9) Economic Theory and Operations Analysis
W.J. Baumol
Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1961

PROGRAMACION LINEAL

Introducción:

Es frecuente que el hombre se encuentre ante problemas que implican conflicto de intereses. Cuando existe un grupo de posibles sucesos entre los cuales tiene ciertas preferencias y no todo está bajo su control, éste es un ejemplo que involucra conflict. Concretamente, si dos jugadores deben decidir entre diferentes alternativas, sin que dicha elección sea del conocimiento del otro, existirá un problema de conflicto de intereses o de decisiones.

El jugador para su decisión deberá contemplar algunos aspectos, como son:

1) En base al control e información parcial que tiene, buscar de sacar el mejor partido.

2) Conocer, lo mejor posible, la psicología de su adversario.

Frente a estos puntos, es obvio que las decisiones o los conflictos de intereses no sólo son propios de los jugadores, sino que también se enfrentan a este tipo de trabajo, Ejecutivos, Economistas, Militares, Gobernantes, etc. y en general cualquier persona durante infinidad de situaciones en su vida. Así, uno de los más interesantes conflictos, es el que enfrenta al hombre versus naturaleza. No siempre el hombre tiene una información cabal de estado de la naturaleza, ésto científicamente significa, la existencia de la información de las leyes del azar que la rigen.

Así por ejemplo, el resultado de salida de un número de un dado es perfectamente conocido. Diremos que el estado de la naturaleza o leyes del azar son conocidas. Si el dado está cargado, no se conocen las leyes del azar; habrá que experimentar para determinarla.

¿Qué posibilidades tiene un jugador frente a otro que conoce que el dado está cargado? Diremos que son menores sus chances de ganar, pues él jugará en base a un dado equilibrado y a la larga perderá.

La teoría de las decisiones se preocupa de todo ésto y considera que las decisiones tanto individuales como colectivas pueden involucrar situaciones de certeza, riesgo o incertidumbre.

Individuo quiere decir persona u organización que es movida por un único interés.

./.

Existe certeza si se sabe que cada acción conduce invariablemente a un resultado.

Existe riesgo si cada acción conduce a diferentes resultados en donde la ley del azar o probabilidad del suceso es conocida.

Existe incertidumbre si cada acción conduce a posibles resultados en donde la ley del azar es desconocida.

Decisiones con certeza:

Se representa por un conjunto de acciones $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y en que f (a) será un índice asociado con a, entonces se buscará en A aquél a_i que maximice (ó minimice) el índice f (a_i).

Lo difícil es la elección del índice, criterio u objetivo, como se le designa. Así, para un empresario su objetivo será fácil de determinar: maximizar beneficios, minimizar pérdidas, maximiar producción o minimizar costo laboral, etc. ¿Pero qué criterio u objetivo mueve a un coleccionista de antigüedades en sus decisiones ?

Precísamente este campo, el de las decisiones con certeza, es donde se desarrolla el tema que nos proponemos estudiar. La Programación Lineal, no es sino un tipo de problema que envuelve deciciones con certeza.

Ejemplo: Problema de la dieta.

Existen diferentes alimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$; una dieta será prescripción que indicará cuántas unidades de los alimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se ingerirán. Será pues x el vector dieta:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ahora bien, para el cuerpo humano, han estudiado los dietéticos, que se necesitan ciertas materias básicas, como son: carbohidratos, grasas, proteínas, vitaminas, etc. Sean $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ la cantidad de carbohidratos (identificado en ésto por el sub-índice i) en los alimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

./.

Luego la dieta, en lo que respecta al mínimo de carbohidratos ne- necesarios será:

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 \ldots + a_{in}\ x_n \geq b_i$$

La cantidad b_i está dada por los requerimientos mínimos del organismo humano, que dependerán de la edad, actividad, situación geográfica, etc.

Así tendremos que si se requieren nutrientes básicos para el organismo, escribiremos para los alimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

n > m , ecuaciones linealmente independientes, infinitas soluciones

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n \geq b_1 \quad \text{(carbohidratos)}$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n \geq b_2 \quad \text{(grasas)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\ x_n \geq b_m \quad \text{(proteínas)}$$

El precio asociado con cada unidad de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ serán $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Luego, el costo de la dieta será igual a la suma:

$$\text{Costo dieta} = p_1\ x_1 + p_2\ x_2 + \cdots + p_n\ x_n$$

El problema matemático, será buscar una de las posibles dietas que satisfagan las restricciones que minimizan el objetivo o costo familiar:

$$\text{Min} \quad z = p_1\ x_1 + p_2 + \cdots + p_n\ x_n$$

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots \quad a_{1n}\ x_n \geq b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mn}\ x_n \geq b_n$$

$$x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \ ; \ldots ; \ x_n \geq 0$$

Claramente se observa lo siguiente:

(1) Existen diferentes acciones o escogencias de dietas.
(2) Existen restricciones o limitaciones para las posibles acciones.
(3) Existe un objetivo o criterio asociado a cada acción: la función costo.

Este tipo de problema matemático se ha llamado Programación Lineal. Hasta hace poco no se había estudiado problemas de esta índole, creando así un nuevo campo en las matemáticas que ha sido bautizado con el nombre de Programación Lineal o "Linear Programming."

La novedad en ésto reside en que en las matemáticas clásicas, se han estudiado problemas de máximos o mínimos de funciones de varias variables. Se han resuelto en su totalidad, con el empleo de las derivadas parciales, y del Hessiano. Simbólicamente se plantea así:

$$\text{Max } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Las soluciones de los puntos de máximo o mínimo se encuentran en el interior del dominio de dichas variables.

También es clásico el problema de buscar valores extremos de una función de varias variables, en que además las variables están sujetas a restricciones. Este tipo de problema se conoce con el nombre de máximo o mínimo con restricciones. El método de los multiplicadores de Lagrange, permite la solución y análisis satisfactorio de dichos máximos relativos, que se encuentran en el interior del dominio de las variables.

El problema se plantea así:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \ldots&\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n &= 0 \end{aligned}$$

Por último, es nuevo en el campo matemático, la búsqueda de máximos o mínimos de funciones de varias variables, sujetas a restricciones que son desigualdades o inecuaciones.

El problema será:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_2 \\ \ldots&\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_m \end{aligned}$$

./.

Las técnicas anteriores no son suficientes para la resolución de estos problemas, por cuanto ellas solo sirven para la búsqueda de máximos relativos, y en el interior del dominio de las variables.

Desafortunadamente, estos problemas tienen un máximo o un mínimo absoluto en las fronteras del dominio de las variables.

Estos conceptos de máximo y mínimo absoluto, fueron planteados y diferenciados por Cauchy. En el tomo X de sus "Mémoire sur les maxime et minima conditionel" (1847) se encuentra el problema general propuesto sin resolver.

<u>Programación lineal.</u>

Se ha designado así a una rama de las matemáticas que se preocupa de buscar máximos o mínimos de funciones lineales de variables sujetas a restricciones expresadas mediante desigualdades lineales.

Se define como función o restricción lineal, toda combinación de primer grado en las variables.

Así por ejemplo, un problema de programación lineal, será del tipo siguiente:

$$\text{Max } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geqslant 0 \ ; \ x_2 \geqslant 0 \ ; \dots ; \ x_n \geqslant 0$$

Programación no lineal será todo problema en que la función o las restricciones no sean lineales.

Por ejemplo:

$$\text{Max } z = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_n x_n^2$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_1 n \leq b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_m 1 x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geqslant ; x_2 \geqslant 0 \ ; \dots ; \ x_n \geqslant 0$$

./.

Este ejemplo se designa en particular con el nombre de programación cuadrática. Como se puede observar, puede ser la función no-lineal (cuadrática en el ejemplo) o las restricciones no-lineales o ambas.

Antecedentes.

Hemos mencionado que Cauchy planteó el problema general sin resolverlo. Debemos mencionar que la Programación Lineal abarca diferentes campos de las matemáticas, así tiene que ver con cálculo matricial, teoría de los conos, hiperespacios euclídeos, etc. Así es que, debemos destacar que los trabajos del s. XIX de los matemáticos Laplace, Sylvester y Cayley son previos y fundamentales para el desarrollo del cálculo matricial. En el siglo XX son importantes los trabajos de Weyl "Elementare Theorie der Konvexen Polyeder" (1935) y de otros, como Kuhn, Tucker, Gerstenhaber, Von Neumann, Hitchcock, Koopman, etc.

En el campo económico se encuentran los primeros pasos en los trabajos de Quesnay (1758), Walras, Pareto, Leontief, que plantearon modelos matemáticos que hoy día son resueltos con el auxilio de las técnicas de la Programación Lineal.

No deja de ser curioso que fueron los complejos problemas de la Logística durante la 2a. guerra mundial, que llevaron a la necesidad de buscar métodos iterativos de cálculo para resolver los problemas. Famoso es el problema que se conoce en la literatura con el nombre de "Hitchcock-Koopman" o de "Transporte" (1947). Fué el problema crucial que enfrentara la Marina Mercante aliada durante la 2a. guerra mundial, referente al abastecimiento de los Ejércitos Aliados en las diferentes partes del mundo.

Problema de Transporte

Un producto homogéneo debe ser embarcado en las cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en m puertos de origen y enviados a destinos en cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

El costo de enviar una cantidad unitaria del origen i al destino j es c_{ij}. El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que deben ser embarcadas para todas las rutas, de tal forma que se minimicen los costos de transporte.

./.

		Destinos				
	j / i	(1)	(2)	...	(n)	Total
Orígenes	(1)	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
	(2)	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	(m)	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
Total		b_1	b_2	...	b_n	

Las relaciones básicas son:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,\ldots,\cancel{m}\,n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \quad x_{ij}$$

Supongamos, un ejemplo en el que existen dos puertos de origen y tres destinos:

./.

j / i	D_1	D_2	D_3	Total
0_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
0_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Total	b_1	b_2	b_3	

La matriz de los costos unitarios de transporte será:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Las condiciones restrictivas de los orígenes y destinos, se plantearán así:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$$

$$x_{11} + x_{21} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} = b_2$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3$$

$$x_{11} \geqslant 0;\ x_{12} \geqslant 0;\ x_{13} \geqslant 0$$

$$x_{21} \geqslant 0;\ x_{22} \geqslant 0;\ x_{23} \geqslant 0$$

y la función lineal u objetivo que se desea minimizar, es la siguiente:

$$\text{Min } z = c_{11}\ x_{11} + c_{12}\ x_{12} + c_{13}\ x_{13} + c_{21}\ x_{21} + c_{22}\ x_{22} + c_{23}\ x_{23}$$

./.

Koopman resolvió este problema, que fué de enorme utilidad para la Marina. El procedimiento se conoce con el nombre de Método de Transporte. Posteriormente Charnes y Cooper idearon un método para resolver estos tipos de problemas, llamado "corner-step stones". En la actualidad se tiene programado este método para las máquinas electrónicas (por ejem. I.B.M. 650); una iteración en esta máquina para un problema de 3 x 9 demora 9 segundos, según el método desarrollado por Poley. Pero es G. Dantzig (1947) quien ideó un método general de resolución conocido con el nombre de Método Simplex.

Método Simplex.

Es un método iterativo de cálculo que requiere sólo operaciones elementales como son la suma, resta, producto y cociente. Consiste en la rutina operativa del método de Jordán, para invertir matrices, más un criterio de selección de filas y columnas.

Posteriormente contribuyeron Charnes, Cooper, Koopman, Dorfman, etc., perfeccionando el método simplex, resolviendo los problemas de degeneración y encontrando otros métodos abreviados de cálculo. Como así mismo abriendo un inmenso campo de aplicaciones.

Así se destacan algunos interesantes trabajos en la agricultura, refinerías, dietética, plantas industriales, talleres de máquinas, insumo-producto, modelos de desarrollo, etc.

Problema de distribución.

Un complejo industrial tiene tres plantas productoras y cinco depósitos que están encargados de los problemas de distribución. Se conocen los siguientes datos:

(1) Mínimo requerido por los depósitos para satisfacer la demanda: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

(2) El nivel de producción máximo de las plantas:

$$a_1, a_2, a_3$$

(3) Los costos de transporte por tonelada de la planta i al depósito j, que se designan por c_{ij}.

Es decir, la información se puede resumir en el cuadro siguiente:

./.

i \ j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Total
P_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	a_1
P_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	a_2
P_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	a_3
Total	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

Matriz de costos c_{ij}:

i \ j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
P_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
P_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
P_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

<u>Objetivo</u>:

Deseamos minimizar los costos de transporte definidos por la función:

$$\begin{aligned}\text{Min } z = \; & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} \\ & + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35}\end{aligned}$$

<u>Restricciones</u>:

Las condiciones o limitaciones de que se envíen a los depósitos las cantidades requeridas son:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant b_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant b_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geqslant b_4$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geqslant b_5$$

./.

La condición de que las plantas no pueden enviar más de lo que producen, o bien, a lo más pueden enviar las cifras máximas de producción a_1, a_2, a_3.

Esto se plantea en la forma siguiente:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leqslant a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leqslant a_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leqslant a_3$$

y, por último, la condición de no negatividad de las variables, se expresa así:

$$x_{11} \geqslant 0; \quad x_{12} \geqslant 0; \quad x_{13} \geqslant 0; \quad x_{14} \geqslant 0; \quad x_{15} \geqslant 0$$

$$x_{21} \geqslant 0; \quad x_{22} \geqslant 0; \quad x_{23} \geqslant 0; \quad x_{24} \geqslant 0; \quad x_{25} \geqslant 0$$

$$x_{31} \geqslant 0; \quad x_{32} \geqslant 0; \quad x_{33} \geqslant 0; \quad x_{34} \geqslant 0; \quad x_{35} \geqslant 0$$

Como se puede observar, es el aspecto típico de un problema de Programación Lineal: "Una función lineal que minimizar y un conjunto de desigualdades lineales".

Este problema también se puede plantear empleando las propiedades de las sumatorias:

$$\text{Min } z = \sum_i \sum_j c_{ij} \quad x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} \geqslant b_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\sum_j x_{ij} \leqslant a_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

<u>Utilización de Máquinas.</u>

En una empresa hay un taller que dispone de tres juegos de máquinas de diferentes rendimientos, para la fabricación de un cierto artículo. El problema es cómo deben distribuirse las órdenes de trabajo para fabricar un número determinado de artículos.

./.

Supuestos:
(1) Capacidad instalada de cada máquina
(2) Demanda de cada artículo
(3) Rendimiento de cada máquina por artículo
(4) Costo de producción de cada máquina con respecto a cada artículo.
(5) Precio de ventas de los artículos
(6) Horas disponibles por equipo de máquinas

En base a estos supuestos, podemos construir nuestro cuadro o matrix de coeficientes:

Cuadro I

rendimiento / demanda por artículo	Horas por pieza		
	M_1	M_2	M_3
a_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
a_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}
a_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}

Cuadro II

Costo / Precio	Costo por artículo		
	M_1	M_2	M_3
v_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
v_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
v_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Cuadro III

	Carga de las máquinas		
	M_1	M_2	M_3
Plan de Producción	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}
	x_{31}	x_{32}	x_{33}
Horas disponibles	d_1	d_2	d_3

La función que hay que maximar, en este caso, son los beneficios netos dados por la función lineal:

$$\text{Max } z = \sum_i \sum_j (v_i - c_{ij})\ x_{ij}$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$\sum_j x_{ij} = ai \quad (i = 1,2,3)$$

$$\sum_i x_{ij}\ n_{ij} \leqslant d_j \quad (j = 1,2,3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

Problema de Producción

Una fábrica de pinturas tiene dos tipos A y B. Estas pinturas son fabricadas en tres plantas, en que cada una produce de ambas en cierta proporción.

Supuestos: (1) Las demandas de A y B son d_1, d_2, respectivamente.
(2) Los precios de ventas son v_1, v_2, por unidad.
(3) El costo de las materias primas es m_1 por tambor y el trabajo es de t_1 por hombre-hora.

Problema: Maximizar beneficios, teniendo en cuenta la siguiente matriz de Insumo-Producto:

Insumo	P_1	P_2	P_3
Materiales (tambores)	a_1	a_2	a_3
Trabajo (hombres-hora)	1	1	1
Producto			
Pintura A (galón)	b_1	b_2	b_3
Pintura B (galón)	c_1	c_2	c_3
Nivel de producción plantas	x_1	x_2	x_3

Planteamiento del problema: Como las demás son limitadas, se tienen las siguientes restricciones:

?

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \leqslant d_1$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \leqslant d_2$$

Los beneficios netos serán:

$$\begin{aligned}\text{Max } z = & (b_1 v_1 + c_1 v_2 - a_1 m_1 - t_1)\, x_1 \\ & + (b_2 v_1 + c_2 v_2 - a_2 m_1 - t_1)\, x_2 \\ & + (b_3 v_1 + c_3 v_2 - a_3 m_1 - t_1)\, x_3\end{aligned}$$

./.

Fabricación de Automoviles y Camiones.

Una fábrica de automoviles y camiones tiene un taller organizado en cuatro departamentos:

(1) Estampado de planchas metálicas
(2) Armaduría de motores
(3) Montaje final de automoviles
(4) Montaje final de camiones

Supuestos: (1) Capacidad instalada de producción
(2) Elasticidad infinita de material y mano de obra.

Con respecto a las capacidades se sabe lo siguiente:

(1) Se pueden estampar 25.000 automoviles ó 35.000 camiones por mes o las correspondientes combinaciones.

(2) Puede armar por mes 33.333 motores de automoviles ó 16.667 motores de camión o las correspondientes combinaciones.

(3) Puede despachar 15.000 camiones por mes o 22.500 automóviles

Beneficio neto: 300 dólares por automovil
250 dólares por camión

Problema: determinar un programa óptimo

Objetivo: maximizar los beneficios netos

Sean: $x_1 \equiv$ N° de autos por mes de fabricación

$x_2 \equiv$ N° de camiones por mes de fabricación

$z \equiv$ beneficio mensual en $ U.S.

Planteamiento matemático:

$$\text{Max } z \equiv 300\ x_1 + 250\ x_2$$

$$\frac{x_1}{25.000} + \frac{x_2}{35.000} \leqslant 1$$

$$\frac{x_1}{33.333} + \frac{x_2}{16.667} \leqslant 1$$

$$x_1 \leqslant 22.500$$

$$x_2 \leqslant 15.000$$

./.

Solución: Max z = US\$ 7.731.488,69

x_1 = 20.370 autos

x_2 = 6.482 camiones

Modelo de Insumo-producto.

Ciertos modelos económicos pueden ser planteados y resueltos por el método simplex. Consideremos la siguiente tabla simplificada de transacciones:

	Industria (1)	(2)	Demanda final	Producción Bruta
Industria (1)	x_{11}	x_{12}	Y_1	x_1
Industria (2)	x_{21}	x_{22}	Y_2	x_2
Trabajo	x_{01}	x_{02}	-	x_0

Analizando horizontalmente el cuadro, podemos afirmar que la producción bruta x_1 por lo menos debe ser igual a la suma de los insumos de las industrias más la demanda final, en igual forma se razonará para la segunda fila, etc.

Algebraicamente escribiremos:

$$x_{11} + x_{12} + Y_1 \leq x_1$$

$$x_{21} + x_{22} + Y_2 \leq x_2$$

$$x_{01} + x_{02} \leq x_0$$

Llamaremos coeficientes técnicos a los siguientes parámetros a_{ij} definidos de la siguiente manera:

$$x_{ij} = a_{ij} \; x_j \qquad ó \qquad a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

reemplazando los x_{ij} en las inecuaciones anteriores, tendremos:

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + Y_1 \leqslant x_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + Y_2 \leqslant x_2$$

$$a_{01}\ x_1 + a_{02}\ x_2 \leqslant x_0$$

estas inecuaciones son del tipo de la P.L. Faltará definir la "función objetivo", que podría ser la de minimizar la función lineal de los costos de mano de obra: para una cierta demanda encontrar la producción bruta que minimice la función :

$$\text{Min } z = a_{01}\ x_1 + a_{02}\ x_2$$

En forma análoga a este problema, se pueden resolver multitud de casos.

Decisión individual con riesgo.

Presentaremos los siguientes ejemplos que permitirán comparar el caso de la P.L. con el de decisión individual con riesgo e incertidumbre.

Sea un vendedor viajero S. Las posibilidades climáticas de la ciudad a que va corresponden a los siguientes:

Estados de la Naturaleza $\begin{cases} N_1 = \text{Hay día de sol o} \\ N_2 = \text{Lluvia} \end{cases}$

Además, al hacer sus visitas de ventas, el puede:

Acciones Personales $\begin{cases} a_1 = \text{salir con terno corriente} \\ a_2 = \text{salir con terno corriente y con paraguas} \\ a_3 = \text{salir equipado para la lluvia (zapatillas impermeables, etc.).} \end{cases}$

Considerando diversos factores, el vendedor S forma la siguiente tabla de valores que miden o relacionan las incomodidades, ventajas o desventajas, con el uso inadecuado o adecuado de ropa.

	a_1	a_2	a_3
N_1	0	2	4
N_2	6	4	3

Como persona racional S, decide basar su acción en el barómetro. El experimento es mirar antes de vestirse, el barómetro para conocer el estado del tiempo. La variable aleatoria observada es x. Supongamos que diera tres indicaciones:

x_1 = buen tiempo

x_2 = dudoso

x_3 = mal tiempo

La distribución de probabilidades de x, depende del Estado de la Naturaleza.

El barómetro ideal marcaría:

	x_1	x_2	x_3
N_1	1	0	0
N_2	0	0	1

Pero este sería un barómetro ideal y muy caro si existiera. Supongamos que el vendedor S tiene que pensar en el costo del barómetro, entonces, adquiere uno cuya distribución de probabilidades es:

	x_1	x_2	x_3
N_1	0.65	0.20	0.15
N_2	0.10	0.35	0.55

Entonces, conociendo la indicación del barómetro (resultado de la experiencia), puede confeccionar una lista de posibles estrategias.

	S_1	S_2	...	S_{27}
x_1	a_1	a_1	...	a_3
x_2	a_1	a_1	...	a_3
x_3	a_1	a_2	...	a_3

No todas serán lógicas.

De estas posibilidades se tendrá que elegir alguna. Las teorías de las decisiones desarrollará procedimientos que racionalicen dicha elección.

<u>Decisión individual con incertidumbre.</u>

El ejemplo anterior se puede utilizar, lo único que es necesario suprimir o ignorar, la distribución de probabilidades del parámetro, en cuanto a los estados de la naturaleza y las lecturas. Es decir, el cuadro:

	x_1	x_2	x_3
N_1			
N_2			

será desconocido y el vendedor tendrá que estimar experimentalmente dichos valores. El problema del costo del experimento podrá ser relevante, o bien, el tomar una decisión equivocada, que podrá costarle la muerte.

Planteamiento del Problema.

La P.L. se preocupa de encontrar el máximo absoluto de una función lineal sujeta a un número finito de restricciones lineales, o seaa:

$$\text{Max} \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_i \quad x_i$$

$$y \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1,2...m)$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad ...; \quad x_n \geqslant 0$$

o bien,encontrar el mínimo absoluto:

$$\text{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_i \quad x_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j \geqslant b_i \qquad (i = 1,2,...m)$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad ...; \quad x_n \geqslant 0$$

Para poder aplicar el método Simplex es necesario primero transformar las inecuaciones en ecuaciones lineales, procurando siempre que los segundos miembros sean positivos. Veremos que en general, esto es siempre posible, con la introducción de un cierto tipo de variables nuevas llamadas variables artificiales y de holgura.

Sea por ejemplo el siguiente problema:

Problema 1: $\quad \text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2$

$$4x_1 + 6x_2 \leqslant 24$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 2$$

$$x_1 \qquad \leqslant 3$$

$$x_1 \geqslant 0 \; ; \; x_2 \geqslant 0$$

Primeramente se observa que los segundos miembros (24;2;3) son positivos en las restricciones, por lo tanto quedarán intactos. El paso siguiente será transformar dichas inecuaciones en ecuaciones lineales.

Bastaría para conseguir eso, agregar a cada inecuación una cierta cantidad desconocida que la transforme en una ecuación. Así tenemos en la inecuación: $4x_1 + 6x_2 \leq 24$, que $4x_1 + 6x_2$ es menor o igual que 24, luego si sumamos una cantidad desconocida $x_1^{\prime}$ a esta inecuación, el primer miembro se hará igual a 24; así: $4x_1 + 6x_2 + x_1^{\prime} = 24$.

Esta variable $x_1^{\prime}$ se llama variable de holgura, pues representa la holgura que tiene dicha inecuación para ser igual a 24. La menor o mayor holgura de esta variable dependerá posteriormente de la posición del máximo absoluto. En resumen, las inecuaciones se transformarán en las siguientes ecuaciones; en base a la introducción de las variables $x_1^{\prime}$ para la primera, $x_2^{\prime}$ para la segunda y $x_3^{\prime}$ para la tercera; o sea, el sistema de restricciones quedará transformado en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 6x_2 + x_1^{\prime} &= 24 \\
-x_1 + x_2 + \quad + x_2^{\prime} &= 2 \\
x_1 \qquad\qquad + x_3^{\prime} &= 3
\end{aligned}
$$

en que, evidentemente continuarán las condiciones de no-negatividad para todas las variables.

$$x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0$$

$$x_1^{\prime} \geq 0 \; ; \; x_2^{\prime} \geq 0 \; ; \; x_3^{\prime} \geq 0$$

Dichas condiciones estarán implícitas en los problemas de P.L. y por lo tanto, prescindiremos de ellas en el planteamiento, pues el método simplex tiene como pre-requisito la positividad de las variables. Quedará el problema entonces en la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 2x_1 + 3x_2 \\
&4x_1 + 6x_2 + x_1^{\prime} = 24 \\
&-x_1 + x_2 + x_2^{\prime} = 2 \\
&x_1 + x_3^{\prime} = 3
\end{aligned}
$$

Es necesario destacar, que es conveniente ordenar las variables, en la forma anterior. Pues así tendremos la columna (o vector) de los coeficientes de la variable x_1; la columna de los coeficientes de x_2; la columna de los coeficientes de x'_1; etc.

El problema anterior, si se escribe en otro orden, no cambia de naturaleza. Además, el hecho de haber agregado tres variables de holgura en las restricciones, obliga a considerar otra función, pero en la cual estas variables no tengan ningún peso en el problema de maximización.

Así, es evidente, que al incluir estas variables con coeficientes ceros en la función lineal, esta no se alterará. Luego de Max $z = 2x_1 + 3x_2$ pasaremos a estudiar el máximo de la función equivalente:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Max } z = & 2x_1 & + 3x_2 & + 0.x'_1 & + 0.x'_2 & + 0.x'_3 & & \\
 & 4x_1 & + 6x_2 & + x'_1 & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + x_2 & & + x'_2 & & = & 2 \\
 & x_1 & & & & + x'_3 & = & 3
\end{array}
$$

y escrito en otro orden será:

$$
\begin{array}{rllllll}
\text{Max } z = & 0.x'_1 & + 0.x'_2 & + 0.x'_3 & + 2x_1 & + 3x_2 \\
24 = & x'_1 & & & + 4x_1 & + 6x_2 \\
2 = & & x'_2 & & - x_1 & + x_2 \\
3 = & & & x'_3 & + x_1 &
\end{array}
$$

Esta es la forma, estandard de plantear el problema para iniciar la itera ción. Se acostumbra a resumir esta información en un cuadro o matriz de coeficientes.

P_0	P'_1	P'_2	P'_2	P_1	P_2
24	1			4	6
2		1		-1	1
3			1	1	0

Estas columnas de coeficientes, se llaman vectores y las designaremos simbólicamente por la letra P_i: Así, habrá un vector P_1, P_2, P'_1, P'_2, P'_3, que corresponderán respectivamente a la columna de los coeficientes de las variables: x_1, x_2; x'_1, x'_2, x'_3. En el cuadro pueden verse los siguientes vectores columnas:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P'_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad P_o = \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nótese que el conjunto de vectores P'_1, P'_2, P'_3, forman una base del espacio de las restricciones, pues son linealmente independientes y pueden generar cualquier otro vector de dicho espacio. Así P_o, P_1, P_2 podrán expresarse en términos de esta base.

Toda la información del problema se resume en el siguiente cuadro de coeficientes:

c_j	→	╳	0	0	0	2	3
↓	╳	P_o	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2
0	P'_1	24	1			4	6
0	P'_2	2		1		-1	1
0	P'_3	3			1	1	0

Se observa que la primera fila y columna corresponden a los coeficientes c_j de las variables.

Esta es la tabla de cálculo del simplex. La primera etapa de cálculo se efectúa agregando dos filas más, una que llamamos z_j y otra z_j-c_j. Así por ejemplo, se tendrán que calcular los valores z_o, z'_1, z'_2, z'_3, z_1, z_2. Los valores se calculan de la siguiente manera:

$$z_0 = 0.24 + 0.2 + 0.3 \quad ; \; z_0 = 0$$
$$z_1' = 0.1 + 0.0 + 0.0 \quad ; \; z_1 = 0$$
$$z_2' = 0.0 + 0.1 + 0.0 \quad ; \; z_2' = 0$$
$$z_3' = 0.0 + 0.0 + 0.1 \quad ; \; z_3' = 0$$
$$z_1 = 0.4 + 0.(-1) + 0.1 \; ; \; z_1 = 0$$
$$z_2 = 0.6 + 0.1 + 0.0 \; ; \; z_2 = 0$$

o sea, se multiplica la la. columna de coeficientes c_j (en esta etapa inicial son $[0,0,0]$) por los vectores columnas P_1', P_2', P_3', P_1, P_2. Dichos productos se suman y ese es el valor de z_j. Los valores $z_j - c_j$, se obtienen restando el coeficiente c_j que figura en la primera fila. Así tendremos:

$$z_1' - c_1' = 0 - 0 = 0$$
$$z_2' - c_2' = 0 - 0 = 0$$
$$z_3' - c_3' = 0 - 0 = 0$$
$$z_1 - c_1 = 0 - 2 = -2$$
$$z_2 - c_2 = 0 - 3 = -3$$

El cálculo de la etapa inicial, se resume en el siguiente cuadro, similar al anterior pero con dos filas más, una para la z_j; y otra para la $z_j - c_j$.

c_j	$\rightarrow$		0	0	0	2	3
$\downarrow$		P_0	P_1'	P_2'	P_3'	P_1	P_2
0	P_1'	24	1			4	6
0	P_2'	2		1		-1	1
0	P_3'	3			1	1	0
z_j		0	0	0	0	0	0
$z_j - c_j$			0	0	0	-2	-3

En esta etapa inicial, con la base P'_1, P'_2, P'_3, hemos obtenido la primera solución realizable:

$$x_1 = 0 \quad ; \; x_2 = 0$$

$$x'_1 = 24 \quad ; \; x'_2 = 2 \quad ; \; x'_3 = 3$$

Obsérvese en el cuadro, que la segunda columna de los P'_i y la de los P_0, son los valores de este primer programa realizable. Precísamente son los valores que figuran al lado del vector P'_i asociado con la variable x'_i. Para esta base: $\left[P'_1, P'_2, P'_3\right]$, los valores que conducen al programa inicial realizable, son los que indica dicha base, es decir: Para P'_1 tendremos $x'_1 = 24$, para P'_2 se tiene $x'_2 = 2$ y para P'_3, $x'_3 = 3$. Los vectores P_1, P_2 no figuran en la base, y por lo tanto, las variables asociadas con ellos x_1, x_2, deberán ser cero.

La función z por maximizar era:

$z = 0.\ x'_1 + 0.\ x'_2 + 0.\ x'_3 + 2.\ x_1 + 3\ x_2$ o sea, el valor de z para estos valores de las variables, es:

$$z = 0.24 + 0.2 + 0.3 + 2.0 + 3.0$$

$$z = 0$$

Este es el primer programa realizable, pues la solución es consistente con las restricciones. Naturalmente, que este no es el máximo y veremos que podemos mejorar esta solución básica o programa inicial. Este nuevo programa conducirá a un valor mayor en z. A continuación insertamos la primera etapa del Simplex:

Primera Etapa del Simplex

c_j	$\longrightarrow$		0	0	0	2	3
$\downarrow$		P_0	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2
0	P'_1	24	1			4	6
0	P'_2	2		1		-1	1
0	P'_3	3			1	1	0
z_j		0	0	0	0	0	0
$z_j - c_j$			0	0	0	-2	-3
0	P'_1	12	1	-6	0	10	0
3	P_2	2	0	1	0	-1	1
0	P'_3	3	0	0	1	1	0
z_j		6	0	3	0	-3	3
$z_j - c_j$			0	3	0	-5	0

Es decir, hemos pasado a un programa realizable de:

$$x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 2$$

$$x'_1 = 12 \ ; \ x'_2 = 0 \ ; \ x'_3 = 3$$

lo que da para z un valor de:

$$z = 0.12 + 0.3 + 0.0 + 2.0 + 3.2$$

$$z = 6$$

Se ha mejorado el programa, pues en la etapa inicial era $z = 0$ y tenemos ahora $z = 6$.

Se observa en el cuadro, que esta mejora se ha conseguido introduciendo en la base inicial $\left[P'_1, P'_2, P'_3 \right]$ otro vector P_2, que pasa a reemplazar al vector P'_2. O sea, hemos seleccionado una columna del cuadro que ha ido a sustituir una fila. El criterio que se ha seguido consiste en introducir aquel vector que aporte más, en esta etapa, a la búsqueda del máximo. Nótese que se eligió el valor $z_j - c_j$ más negativo, en este caso es -3.

Se encontró la fila P_2' analizando los cocientes entre los componentes del vector P_o y los correspondientes del vector P_2. Se comparan los cocientes:

$$24: 6 = 4; \quad 2: 1 = 2 \; ; \quad 3: 0 = \infty$$

Se selecciona el valor 2 que proviene de 2:1, o sea, el cociente mínimo o menor de los tres. Este criterio seleccionará al vector que sale de la base. Con esto, estamos en condiciones de calcular el cuadro de la primera etapa del simplex. La técnica de cálculo o método iterativo, será el procedimiento de Jordan, para invertir matrices. Daremos un resumen del método de cálculo y criterios empleados.

<u>Método Simplex</u>.

(1) En la etapa inicial se calcula la fila de los valores $z_j - c_j$, se inspeccionan dichos valores. Cualquier cifra negativa en dicha fila identifica al vector columna candidato a entrar en la base. El valor en z ahora será igual o mayor. (En el ejemplo se seleccionó a P_2).

(2) Se inspecciona la columna seleccionada y con las cifras positivas se efectúan los cocientes entre los componentes del vector P_o y los correspondientes del vector columna seleccionado.

Se escoge el menor de ellos, que determinará la fila que sale (En este caso es P_2'). Si se produce algún empate, se procede a tomar la columna P_1', vecino a P_o, y se efectúan los cocientes: se escogerá el menor. Si se repite el empate se pasa a P_2' y así sucesivamente hasta romper la igualdad. (Este problema del empate se conoce en la teoría de la P.L. con el nombre "Caso de Degeneración", resuelto por Charnes).

Cálculo de los nuevos coeficientes.

El proceso iterativo del cálculo de los nuevos coeficientes, como se dijo, es similar al método de Jordan. Del cuadro de la primera etapa del Simplex copiaremos sólo la columna P_2 que entra en la base; la fila P'_2 que sale de la base; como también la nueva fila P_2 con sus coeficientes calculados.

								3	
								P_2	
								6	
←	0	P'_2	2	0	1	0	-1	1	
								0	
→	3	P_2	2	0	1	0	-1	1	

Definición: Llamaremos pivote al elemento que se encuentra en la intersección de la columna P_2 y la fila P'_2, o sea al número 1 en este ejemplo.

Llamaremos semi-pivotes a los elementos restantes de la columna P'_2, o sea el número 6 y el 0.

Regla (1): Los coeficientes de la fila de la variable que entra en la nueva base (o etapa siguiente) se obtuvieron dividiendo los elementos de la fila del pivote por el pivote. En el cuadro anterior son:

Elementos de la fila del pivote	dividido por	Pivote	Da	Nuevos elementos de la etapa siguiente
2	:	1	=	2
0	:	1	=	0
1	:	1	=	1
0	:	1	=	0
-1	:	1	=	-1
1 ↓	:	1	=	1 ↑

Nota: La flecha hacia abajo señala los coeficientes que salen y la flecha hacia arriba señala los coeficientes que entran.

Para el cálculo de los coeficientes restantes, será conveniente reproducir sólo del cuadro lo que interesa destacar, así copiaremos la columna P_2 del pivote y la nueva fila de coeficientes del P_2 que entró en la base. Calcularemos sólo los coeficientes de la primera fila de la etapa siguiente, o sea P'_1, a modo de ilustración:

							3
							P_2
0	P'_1	24	1	0	0	4	6
							1
							0
0	P'_1	12	1	-6	0	10	0
3	P_2	2	0	1	0	-1	1

Regla (2): Un coeficiente cualquiera, que no pertenezca a la fila que entra, se obtiene restando del coeficiente homólogo de la etapa anterior el producto del semi-pivote de la fila en que está el elemento por el coeficiente nuevo (calculado por la regla 1) que se encuentra en la columna del elemento homólogo.

Así en el cuadro anterior, los cálculos correspondientes a la primera fila de la nueva etapa serán los siguientes:

Elemento homólogo de la fila P_3'. Etapa Inicial	MENOS	Semipivote correspondiente a la columna P_2 Etapa Inicial	POR	Coeficiente recien calculado de la fila P_2. Primera Etapa	DA	Nuevo coeficiente de la fila P_3'. Primera Etapa
24	-	6	.	2	=	12
1	-	6	.	0	=	1
0	-	6	.	1	=	-6
0	-	6	.	0	=	0
4	-	6	.	-1	=	10
6	-	6	.	1	=	0

En igual forma se calcularán los coeficientes de la fila P_3'.

Elemento homólogo de la fila P_3'. Etapa Inicial	MENOS	Semipivote correspondiente a la columna P_2 Etapa Inicial	POR	Coeficiente recién calculados de la fila P_2. Primera Etapa	DA	Nuevo coeficiente de la fila P_3'. Primera Etapa
3	-	0	.	2	=	3
0	-	0	.	0	=	0
0	-	0	.	1	=	0
1	-	0	.	0	=	1
1	-	0	.	-1	=	1
0	-	0	.	1	=	0

Se ilustraron en la página siguiente las dos primeras etapas del simplex

ETAPAS DEL SIMPLEX

C_j	$\rightarrow$		0	0	0	2	3	
$\downarrow$		P_o	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2	
0	P'_1	24	1	0	0	4	6	INICIAL
0	P'_2	2	0	1	0	-1	1	
0	P'_3	3	0	0	1	1	0	
z_j	0	0	0	0	0	0	0	
$z_j - c_j$			0	0	0	-2	-3	
0	P'_1	12	1	-6	0	10	0	PRIMERA
3	P_2	2	0	1	0	-1	1	
0	P'_3	3	0	0	1	1	0	
z_j		6	0	3	0	-3	3	
$z_j - c_j$			0	3	0	-5	0	

Al completar esta primera etapa, se vuelve a iniciar la inspección. Existe algún $z_j - c_j < 0$? La columna P_1 tiene $z_j - c_j = -5$, lo que quiere decir, que no se ha llegado a un máximo y que será preciso introducir el vector P_1 en la base. Introducir este vector es a costa del sacrificio de otro que sale, para encontrar el que sale se recurre al criterio del mínimo de los cocientes entre los coeficientes de las columnas P_o y P_1 de esta etapa: $\frac{12}{10} = 1,2$; $\frac{3}{1} = 3$; se descarta el cociente $\frac{2}{-1}$ por ser negativo. Por lo tanto, la fila P'_1 saldrá. El cálculo de los nuevos coeficientes a_{ij} se efectúan en la misma forma que lo descrito en la etapa anterior.

El resumen de ambas etapas es el siguiente:

CUADRO DEL SIMPLEX

c_j	$\rightarrow$		0	0	0	2	3	
$\downarrow$		P_0	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2	
0	P'_1	24	1	0	0	4	6	INICIAL
← 0	P'_2	2	0	1	0	-1	1	
0	P'_3	3	0	0	1	1	0	
z_j		0	0	0	0	0	0	
$z_j - c_j$			0	0	0	-2	-3	
← 0	P'_1	12	1	-6	0	10	0	PRIMERA
→ 3	P_2	2	0	1	0	-1	1	
0	P'_3	3	0	0	1	1	0	
z_j		6	0	3	0	-3	3	
$z_j - c_j$			0	3	0	-5	0	
→ 2	P_1	6/5	1/10	-3/5	0	1	0	SEGUNDA
3	P_2	16/5	1/10	2/5	0	0	1	
← 0	P'_3	9/5	-1/10	3/5	1	0	0	
z_j		12	5/10	0	0	2	3	
$z_j - c_j$			1/2	0	0	0	0	

Hemos obtenido otro programa realizable:

$$x_1 = 6/5 \quad ; \quad x_2 = 16/5 \quad ; \quad x'_3 = 9/5$$

la primera da: $z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x'_3$

$$= 2 \cdot 6/5 + 3 \cdot 16/5$$

$$z = 60/5 = 12$$

Nótese que los valores de las variables se encuentran en la segunda etapa en la columna P_0 y que el valor de la función para estos valores se encuentran en el z_0.

Podemos observar en la fila $z_j - c_j$ que las columnas que tienen $z_j - c_j = 0$ son: P'_2, P'_3, P_1, P_2 y los vectores P_1, P_2, P'_3 están en la solución. Necesitamos analizar si la columna P'_2 puede dar otra solución mayor. Luego en este ejemplo, aún cuando no existen valores negativos, es conveniente entrar el vector P'_2 en lugar del P'_3 y realizar otra etapa más. En este ejemplo demostraremos, que generalmente esto no ocurre, pues es un caso en que existe más de un máximo. De todas formas, el valor encontrado $z = 12$ para los valores de $x_1 = 6/5$, $x_2 = 16/5$, y $x'_3 = 9/5$ corresponden a un máximo. Se reconoce esto, por el hecho de que no hay $z_j - c_j < 0$. El problema termina aquí y solo corresponde analizar la presencia de P'_2 en la base.

c_j	$\longrightarrow$		0	0	0	2	3	
$\downarrow$		P_0	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2	T
2	P_1	3	0	0	1	1	0	E R
3	P_2	2	1/6	0	-2/3	0	1	C
0	P'_2	3	-1/6	1	5/3	0	0	E
z_j		12	1/2	0	0	2	3	R
$z_j - c_j$			1/2	0	0	0	0	A

Se desprende que también son soluciones los valores:

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 2$$

$$x'_1 = 0 \quad x'_2 = 3 \qquad \text{Max } z = 12$$

Habiendo más de una solución, existirán infinitas soluciones, en que los valores encontrados serán las soluciones principales o extremas. Cualquier otra solución se podrá construir como combinación lineal convexa de estas dos, que se encuentran en los puntos extremos del poliedro de las restricciones.

$$x = \alpha x_A + (1 - \alpha)\, x_B$$

$$\text{para: } 0 \leq \alpha \leq 1$$

en que $x_B = (3 \; ; \; 2) \; ; \; x_A = (6/5 \; ; \; 16/5)$

Para calcular otra solución será necesario aplicar la fórmula (1) tanto para las abscisas como para las ordenadas de x_A y x_B.

Problema 2. $\quad$ Max $z = 3x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 12$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$$

Este problema es muy similar al anterior, pero como veremos más adelante existe en las soluciones una diferencia fundamental.

Procediendo como en el otro problema, introduciremos las variables de holgura x_1', x_2', x_3':

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 + 0.\,x_1' + 0.\,x_2' + 0.\,x_3'$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_1' = 12$$
$$-x_1 + x_2 + x_2' = 2$$
$$x_1 + x_3' = 3$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_1' \geqslant 0;\ x_2' \geqslant 0;\ x'_3 \geqslant 0$$

De este sistema pasamos a otro equivalente, en el que se suprimirán las desigualdades de no negatividad de las variables, simplemente por comodidad, aún cuando ellas están implícitas en toda esta teoría.

$$\text{Max } z = 0.\,x_1' + 0.\,x_2' + 0.\,x_3' + 3x_1 + 2x_2$$
$$12 = x_1' + 2x_1 + 3x_2$$
$$2 = x_2' - x_1 + x_2$$
$$3 = x_3' + x_1$$

Con este sistema pasamos al cuadro de coeficientes.

P_0	P_1'	P_2'	P_3'	P_1	P_2
12	1	0	0	2	3
2	0	1	0	-1	1
3	0	0	1	1	0

que representa la matriz de restricciones de la función lineal z. Para incluir los coeficientes de dicha función, se agrega una fila encima del cuadro:

	0	0	0	3	2
P_o	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2
12	1	0	0	2	3
2	0	1	0	-1	1
3	0	0	1	1	0

El programa inicial realizable es:

$$x'_1 = 12 \;;\quad x'_2 = 2 \;;\quad x'_3 = 3$$

como cada variable de estas está asociada con los vectores P'_1, P'_2, P'_3 respectivamente, es necesario destacar en el cuadro que dichos valores correspondientes a la base inicial P'_1, P'_2, P'_3 .

Se incluye esto agregando una nueva columna vecina a la de la P_o, esta columna será:

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix}$$

Por razones del cálculo de los z_j se anexan a esta columna, los coeficientes c_j de las variables, relacionadas con los vectores P'_j. O sea que el cuadro quedará en su etapa inicial, en la forma:

c_j	$\longrightarrow$		0	0	0	3	2
$\downarrow$			P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2
0	P'_1	12	1	0	0	2	3
0	P'_2	2	0	1	0	-1	1
0	P'_3	3	0	0	1	1	0
	z_j	0	0	0	0	0	0
$z_j - c_j$			0	0	0	-3	-2

El cálculo de los z_j, se efectúa sumando los productos de los elementos de la primera columna de los c_j por los elementos homólogos de las columnas $\left\{P_o, P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_1, P_2\right\}$.

El cálculo $z_j - c_j$, se obtiene restando a dichos vectores los coeficientes respectivos de la columna j que figuran en el encabezamiento. El criterio del más negativo $z_j - c_j$, indica que el vector P_1 debe entrar en la nueva base o primer programa realizable. Entra el vector P_1 pero sale el vector P_3^0, en base al criterio del mínimo positivo de los coeficientes entre los coeficientes homólogos de P_o y P_1. El cálculo de los nuevos coeficientes de la primera etapa se realizan de acuerdo a las reglas explicadas anteriormente. La primera etapa y la inicial son:

c_j	→		0	0	0	3	2	
↓		P_o	P_1^0	P_2^0	P_3^0	P_1	P_2	I N
0	P_1^0	12	1	0	0	2	3	I C
0	P_2^0	2	0	1	0	-1	1	I
0	P_3^0	3	0	0	1	1	0	A
z_j		0	0	0	0	0	0	L
$z_j - c_j$			0	0	0	-3	-2	
0	P_1^0	6	1	0	-2	0	3	P
0	P_2^0	5	0	1	1	0	1	R I
3	P_1	3	0	0	1	1	0	M
z_j		9	0	0	3	3	0	E R
$z_j - c_j$			0	0	3	0	-2	A

Se observa, que el primer programa realizable es el siguiente:

$$x_1 = 3; \; x_2 = 0$$

$$x_1^0 = 6; \; x_2^0 = 5 \; ; \; x_3^0 = 0$$

Nótese que los valores que figuran en la columna P_o corresponden a los de las variables asociadas a los vectores P_1^0, P_2^0, P_1 de la base, y que toda otra variable que no figure en la base es cero.

La fila z_j-c_j nos indica que es posible mejorar la solución anterior.
Se consigue esto introduciendo el vector P_2 en la base a costa de la salida de P'_1.

En resumen esta segunda etapa es la siguiente:

SEGUNDA ETAPA

2	P_2	2	1/3	0	-2/3	0	1
0	P'_2	3	-1/3	1	2/3	0	0
3	P_1	3	0	0	1	1	0
z_j		13	2/3	0	5/3	3	2
$z_j - c_j$			2/3	0	5/3	0	0

La ausencia de cifras negativas en las diferencias z_j-c_j nos indica que hemos llegado al máximo. Dicho máximo es $z = 13$.

El segundo programa realizable o programa óptimo es:

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 2$$

$$x'_1 = 0 \; ; \; x'_2 = 3 \; ; \; x'_3 = 0$$

$$\text{Max } z = 13$$

La presencia de tres ceros en las diferencias $z_j - c_j$ que figuran en el cuadro en las columnas de los vectores que constituyen la base $\left\{P_2, P'_2, P_1\right\}$, nos demuestra que este máximo es único. Recuérdese que en el problema anterior existía un cuerto cero, que era indicio de que había otro máximo, por lo menos.

En resumen las dos etapas del simplex son las siguientes:

c_j →			0	0	0	3	2	
↓		P_o	P'_1	P'_2	P'_3	P_1	P_2	
0	P'_1	12	1	0	0	2	3	INICIAL
0	P'_2	2	0	1	0	-1	1	
0	P'_3 ←	3	0	0	1	1	0	
z_j		0	0	0	0	0	0	
$z_j - c_j$			0	0	0	-3	-2	
0	P'_1 ←	6	1	0	-2	0	3	PRIMERA
0	P'_2	5	0	1	1	0	1	
→ 3	P_1	3	0	0	1	1	0	
z_j		9	0	0	3	3	0	
$z_j - c_j$			0	0	3	0	-2	
→ 2	P_2	2	1/3	0	-2/3	0	1	SEGUNA
0	P'_2	3	-1/3	1	2/3	0	0	
3	P_1	3	0	0	1	1	0	
z_j		13	2/3	0	5/3	3	2	
$z_j - c_j$			2/3	0	5/3	0	0	

Maz $z = 13$; $x_1 = 3$; $x_2 = 2$

$x'_2 = 3$

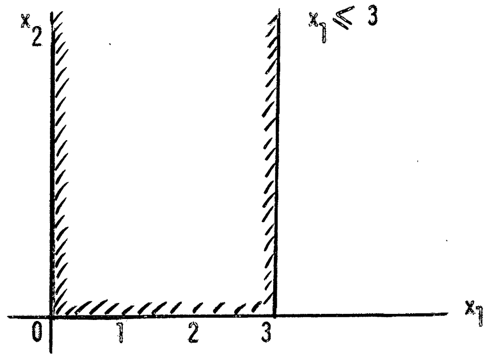
Este problema se presta muy bien para analizar las etapas del sim - plex gráficamente.

Solución gráfica.

El problema estudiado es el siguiente:

$$\text{Maz } z = 3x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Haremos un gráfico cartesiano de ejes $x_1 - x_2$ y representaremos sobre el plano las restricciones o desigualdades del problema.



En el gráfico se han representado primeramente las desigualdades más sencillas:

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0; \quad x_1 \leq 3$$

Para representar las otras inecuaciones, es necesario transformarlas en ecuaciones y calcular dos puntos para cada recta y luego unirlos.

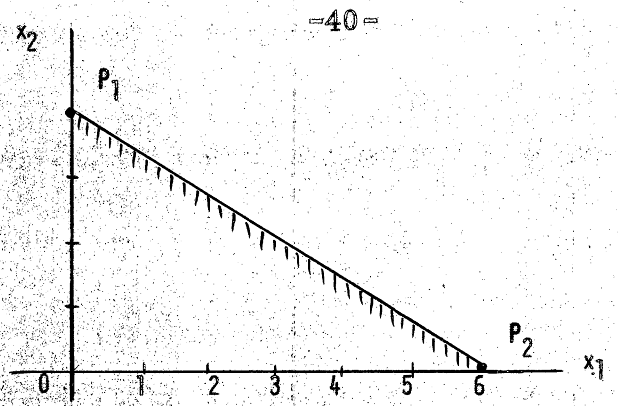
$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \qquad 2x_1 + 3x_2 = 12$

Si $x_1 = 0$, entonces $2.0_1 + 3.x_2 = 12$ y $x_2 = 4$

Si $x_2 = 0$, entonces $2.x_1 + 3.0 = 12$ y $x_1 = 6$

Los dos puntos de la recta tienen las siguientes coordenadas:

P_1 (0 ;4); P_2 (6 ;0) y la recta será la que pasa por P_1 y P_2.



Como esa es una desigualdad, los puntos que la satisfacen quedarán definidos por la región que determina la ecuación de la recta, la cual divide el plano en dos regiones: una hacia arriba de P_1 P_2, cuyos puntos no verifican la desigualdad y otra hacia abajo que representan los puntos que la satisfacen. Para saber cual es el área que determina la restricción definida por esta desigualdad, bastará reemplazar las coordenadas del origen 0 (0;0) y verificar si la satisface. Si esta es la situación, querrá decir que el origen es un punto y todos los demás que queden en ese lado. Por lo tanto los puntos del otro lado de la recta P_1, P_2 se excluyen.

Verificación del origen: 0 (0;0)

$$2.0 + 3.0 \leqslant 12$$

$$\therefore \quad 0 \leqslant 12 \qquad \underline{\underline{\text{correcto}}}$$

Luego, los puntos sobre la recta no satisfacen la restricción.

En igual forma se representa la otra inecuación:

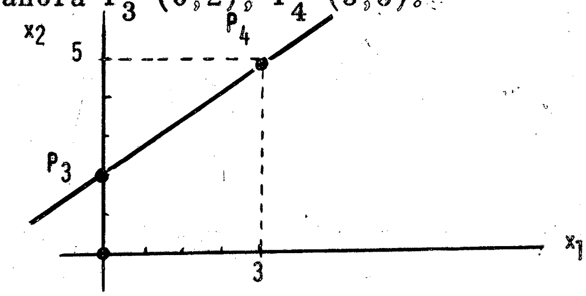
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2$$

$$-x_1 + x_2 = 2$$

Si $x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 5$

Los puntos son ahora P_3 $(0;2)$, P_4 $(3;5)$.



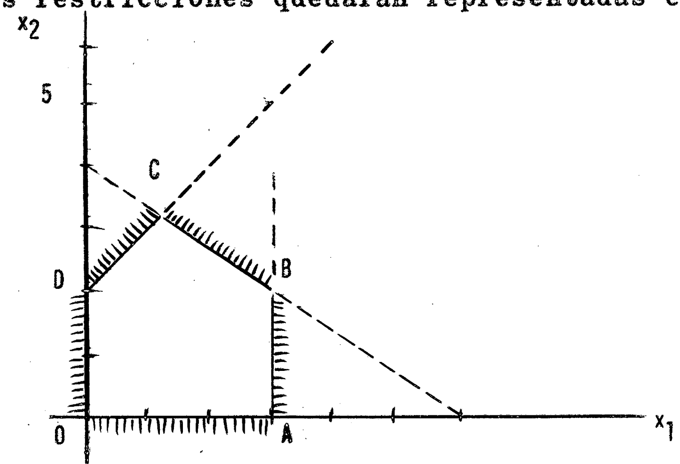
Para determinar el área que define dicha inecuación, bastará reemplazar las coordenadas del origen:

$$-0 + 0 \leqslant 2$$

$$\therefore \quad 0 \leqslant 2 \qquad \underline{\text{correcto}}$$

Luego, hay que considerar la zona en que se encuentra el origen. Se excluye la otra zona que no contiene al origen.

En resumen todas las restricciones quedarán representadas en el siguiente cuadro único:



La solución del máximo se encontrará en alguno de los vértices de la figura anterior OABCD.

Las etapas del simplex se pueden seguir claramente en este gráfico. Así por ejemplo, en la etapa inicial o programa básico inicial se tiene:

$$x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 0 \quad y \ z = 0$$

Nos encontramos en el gráfico cuyas coordenadas son $(0;0)$. Este programa inicial realizable fué a costa de no producir nada de x_1, x_2 y dejar toda la holgura máxima posible, es decir:

$$x_1' = 12 \ ; \ x_2' = 2 \ ; \ x_3' = 3$$

La primera etapa del simplex nos dió los siguientes valores:

$$x_1 = 3 \;;\; x_2 = 0 \;\text{ y }\; z = 9$$

Se observa en el gráfico que este programa realizable, equivale a encontrarse en el vértice A del gráfico.

En la segunda etapa del simplex se llegó a los valores:

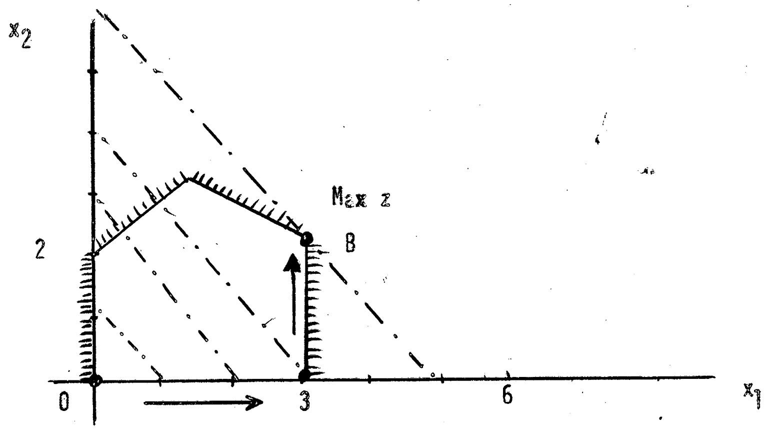
$$x_1 = 3 \;;\; x_2 = 2$$

es decir, se está en el vértice B de la figura. En el ejemplo, se infiere que este es el máximo absoluto y se llegó a él, según el gráfico, siguiendo la ruta del poliedro 0.A.B. No se puede captar que este es el máximo, pues sería necesario dibujar la función z, que se desea maximizar, pero para ellos tendríamos que colocar un tercer eje perpendicular a los dos $x_1 - x_2$. Pero puede salvarse esta dificultar dibujando las trazas de la función z a diferentes cotas de z. Es conveniente además imaginarse que estas trazas serán las aristas de los peldaños de ese plano.

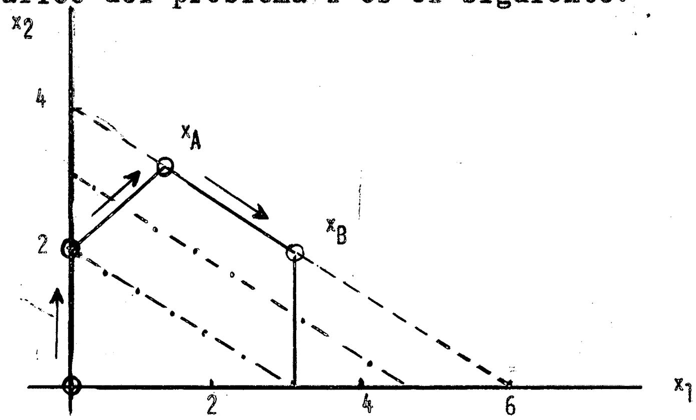
Tabulando la función $z = 3\,x_1 + 2\,x_2$, para diferentes cotas en z tendremos:

$z = 0$;		$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	
$z = 1$;	$x_1 = 0$	$x_2 = 1/2$;	$x_1 = 1/3$	$x_2 = 0$
$z = 2$;	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$;	$x_1 = 2/3$	$x_2 = 0$
$z = 6$;	$x_1 = 0$	$x_2 = 3$;	$x_1 = 2$	$x_2 = 0$
$z = 13$;	$x_1 = 0$	$x_2 = 13/2$;	$x_1 = 3$	$x_2 = 0$

Finalmente, en el siguiente gráfico incluiremos todo el análisis



Problema 1. El gráfico del problema 1 es el siguiente:



que corresponde al siguiente problema analítico:

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

En el gráfico, las flechas indican las etapas del simplex y los puntos x_A y x_B las soluciones extremas de los óptimos. El trazo $x_A - x_B$ contiene todos los puntos óptimos de la función. Cualquier punto del trazo $x_A - x_B$ se obtiene por combinación lineal de los vértices x_A y x_B.

A N E X O 1

(Formulación de Problemas Económicos)

(reproducción)

Formulación de problemas económicos a través de programación lineal

1. La solución matemática de los problemas de programación lineal es relativamente sencilla si el problema práctico se plantea en la forma estandarizada. La mayor dificultad consiste en formular problemas económicos de una manera adecuada. El problema de planteamiento constituye el objeto del presente capítulos.

Una de las dificultades más importantes consiste en la gran variedad de formulaciones alternativas. A cada formulación corresponde una interpretación económica diferente. Vamos a tratar una discusión sistemática de las alternativas de formulación de las interpretaciones correspondientes. El instrumento más importante de esta discusión es la "notación de cuadro", introducida ya en el capítulo anterior y la consideración simultánea del problema directo y el dual.

2. Comenzaremos analizando una empresa productora que compra factores primarios (mano de obra, energía, materias primas) a precios fijos, de mercado yvende sus productos también a precios fijos, de mercado. Dejaremos fuera de consideración, por ahora, los problemas referentes a productos intermediarios y de localización, tanto como los de acumulación y almacenamiento. Vamos a suponer que la empresa de una manera continua y que los varios flujos de compras, ventas y producción son invariables a través del tiempo. Desde el punto de vista económico, es éste un modelo de <u>equilibrio</u> y no de crecimiento o de fluctuación.

Supongamos que una empresa tiene varios procesos alternativos de producción. En el Modelo 1, se presentan dos procesos producti

./.

vos correspondientes a las dos primeras columnas dentro del cuadro. Cada proceso tiene sus insumos de factores (o materias primas) representados por los coeficientes a, y varios productos representados por los coeficientes k. Todos los coeficientes de insumos y de productos se refieren a una escala unitaria del proceso. Esta escala es una variable (x). Si la escala se cambia, todos los insumos y productos cambian en proporción con la escala. Las cantidades de insumos o de productos relacionados con cualquier escala de producción x_1 ó x_2, se obtienen multiplicando los coeficientes a y k por las escalas deseadas.

Además de los procesos productivos, existen actividades de compra de factores y de venta de productos. Por ejemplo, la tercera columna representa la compra del primer factor. Vamos a adoptar el criterio de que todo lo que desaparece dentro de la empresa será positivo, y todo lo que aparece dentro de la empresa será negativo. Por esto, la unidad del primer factor que aparece dentro de la empresa como resultado de la compra (a una escala unitaria) será negativa. Por la misma razón, las actividades (columnas) de ventas de productos se presentan con un coeficiente de (+1) en la línea correspondiente a ese producto. Observese que los coeficientes de las actividades de producción siguen el mismo criterio.

Las escalas unitarias de todas las actividades son completamente arbitrarias. Lo único que se requiere es que los coeficientes (y los precios que se discutirán abajo) sean consistentes entre si. Un cambio en la escala unitaria de una actividad produce simplemente un cambio compensatorio del valor numérico de la solu

./.

ción de esta actividad, sin implicar cambio alguno en el significado económico del resultado.

Además de los coeficientes de insumos y de productos, las actividades también tienen precios asociados que aparecen a los pies de las columnas, constituyendo el margen inferior del cuadro. Los precios se refieren a las escalas numéricas unitarias. Los precios de compras son negativos, los precios de ventas son positivos. Los precios asociados con las actividades productivas son cero, pero podrían ser negativos en caso que no todos los gastos asociados con la producción fueran tomados en cuenta en forma de insumos de factores. Por ejemplo, un impuesto proporcional sobre la producción podría aparecer como un costo de esta naturaleza. En cambio, un subsidio proporcional sobre la producción podría aparecer como un precio positivo al pie de la columna de una actividad de producción.

La función que se maximiza se obtiene en forma convencional, multiplicando las variables directas (escalas) por los precios. Esta función representa la utilidad neta de la empresa compuesta de ingresos sobre ventas de productos, menos gastos sobre compras de factores.

$$z = 0x_1+0x_2-C_3x_3-C_4x_4+C_5x_5+C_6x_6$$

Las limitaciones las forman las balanzas de factores y de productos. Las balanzas de factores corresponden al siguiente molde:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \qquad -x_3 \qquad \leqslant 0 \qquad (2)$$

(insumos en producción)-(compras) $\leqslant 0$ (primer factor).

./.

Estas balanzas significan que las compras de factores tienen que ser al menos iguales a los insumos de la producción. Estas balanzas permiten un exceso de compras, implicando un desperdicio de factores (no hay posibilidad de almacenamiento). Naturalmente, en un programa de operación óptima, tales desperdicios no van a ocurrir, a menos que el precio de mercado del factor no sea cero. Entonces, sería justo escribir estas balanzas en forma de igualdades exactas. Sin embargo, por el momento es más conveniente dejar las relaciones en forma de desigualdades puesto que:

(a) los desperdicios de factores son completamente posibles desde el punto de vista técnico; y se eliminan solamente en base a consideraciones económicas. Pero tales consideraciones pertenecen lógicamente a la resolución del problema de maximización, no a su planteamiento.

(b) el uso de igualdades exactas es equivalente a la ampliación del modelo por la inclusión de desigualdades adicionales con signos contrarios.

Esto es innecesario, porque las balanzas en su forma de desigualdades implican de por sí que los desperdicios no pueden producirse si los precios de mercado correspondientes son mayores de cero. Si las balanzas figuran en forma de desigualdades, la simetría del modelo es más transparente y la interpretación económica, más fácil.

Las balanzas de productos corresponden al siguiente molde:

$$-k_{11}x_1-k_{12}x_2+x_5 \leqslant 0$$
$$-(\text{bienes producidos})+(\text{ventas}) \leqslant 0$$

./.

Estas balanzas significan que las ventas de productos no pueden exceder a la producción, si bien pudieran ser menores que ella, desperdiciándose la diferencia. Por razones similares a las arriba mencionadas, tales desperdicios no van a ocurrir en un programa óptimo. Las mismas consideraciones son aplicables con respecto a la representación de estas balanzas por desigualdades más bien que por igualdades.

3. Un análisis del Modelo 1 revela que éste no tiene solución. Si existen procesos productivos que conducen a utilidades positivas (veáse cuadro B del Modelo 1) no existe impedimento alguno para una expansión indefinida de la empresa en busca de utilidades máximas. Esta expansión puede realizarse sin violar las balanzas de los factores o de los productos. Por ejemplo, en el cuadro C del Modelo 1, fijamos las escalas de los procesos productivos a 10 unidades cada una. Dentro de las primeras dos columnas del cuadro, presentamos los productos individuales de las variables de la escala por los coeficientes del cuadro B ($a_{11}x_1$, $a_{12}x_2$, $a_{21}x_1$, $a_{22}x_2$, $-k_{11}x_1$, $-k_{12}x_2$, $-k_{21}x_1$, $-k_{22}x_2$). Además, fijamos las escalas de las actividades de compra de factores y de venta de productos de tal manera que resulten en forma de igualdades exactas en las balanzas. Entonces, las restricciones están satisfechas por el conjunto de las escalas $x_1, \ldots, x_6$.

En el margen inferior, presentamos los productos (matemáticos) individuales de las variables de escala por los precios ($0x_1$, $0x_2$, $-C_3x_3$, $-C_4x_4$, C_5x_5, C_6x_6). El valor de la función z es igual a la suma algebraica de los componentes del margen inferior del cuadro C. Esta suma es de 17.700.

./.

Se puede observar que no hay ningún inconveniente para una expansión de todas las actividades (producciones, ventas, compras)por un factor de 10. Tal expansión no afecta las balanzas de factores y de productos y produce un aumento de 10 veces de las utilidades netas de la empresa. Se puede igualmente realizar una expansión por un factor de 100, 1000, 10.000, etc. *ad infinitum*. El problema de maximización no tiene solución.

PROBLEMA. Demuestre que el problema dual correspondiente al cuadro B es inconsistente.

4. El problema del Modelo 1 no tiene solución debido a que no presenta impedimentos para una expansión indefinida de la empresa. Incluyendo restricciones apropiadas a esta expansión, resulta que existe una solución.

En el Modelo 2, se presentan limitaciones máximas sobre las escalas de todas las actividades de producción, de compra y de venta. Para que el problema tenga una solución no se necesitan todas estas limitaciones. Por ejemplo, las limitaciones sobre los dos procesos productivos son suficientes para impedir una expansión indefinida. Limitaciones solamente sobre las compras de factores o solamente sobre las ventas de productos son igualmente suficientes. La inclusión de limitaciones múltiples tiene como consecuencia que no todas las limitaciones resulten efectivas en la solución.

(b) Podrían existir, además, limitaciones máximas conjuntas sobre escalas de las varias actividades. Por ejemplo, una limitación posible podría ser la siguiente:

$$2x_5 + 3x_6 \leq 100 \qquad (4)$$

./.

Una limitación de este tipo sobre las ventas de productos puede resultar cuando éstos son substituidos recíprocos dentro del consumo (como ser: cobre y aluminio). Otras limitaciones conjuntas pueden aparecer por una serie de razones.

PROBLEMA. Dé algunos otros ejemplos de limitaciones máximas conjuntas sobre las escalas de varias actividades.

5. La interpretación de las variables duales del Modelo 2 tiene mucha importancia económica. Las variables duales correspondientes a las balanzas se revelan como valores internos de contabilidad de los factores o de los productos dentro de una empresa, mientras que las variables duales correspondientes a las limitaciones máximas sobre las escalas de las actividades se revelan como "rentas internas" de contabilidad.

Esta terminología de "rentas" es una generalización del concepto clásico de rentas, en la teoría económica. Una renta, en esta teoría, es el precio de un factor cuya oferta es completamente inelástica. Se puede considerar que oportunidades limitadas de producir, de comprar o de vender representen "factores" cuya oferta se caracteriza por tal completa inelasticidad. Más adelante presentamos una demostración gráfica de estas relaciones.

6. La función del problema dual y de las restricciones duales se pueden interpretar fácilmente con la ayuda de las interpretaciones anteriormente mencionadas de las variables duales. Las restricciones máximas sobre las escalas tienen las formas siguientes:

./.

<u>Producción.</u>	$(-a_{11}y_1 - a_{12}y_2 + k_{11}y_3 + {}_{21}y_4)$		$\leq$	y_5	(5)
	Valor agregado del primer proceso productivo a precios internos			renta interna del primer proceso productivo	
<u>Compra</u>	y_1	c_3	$\leq$	y_7	(6)
	Valor interno del primer factor	precio del mercado del primer factor		renta interna de la actividad de compra del primer factor	
<u>Venta</u>	y_3	c_5	$\geq$	$-y_9$	(7)
	Valor interno del primer producto	precio de mercado del primer producto		renta interna de la actividad de venta del primer producto	

En los tres casos anteriores las restricciones duales tienen en el fondo un significado económico igual: utilizando valores internos y rentas internas, ya sea se produce una pérdida de la operación de la actividad o, en el mejor de los casos, las utilidades son cero. Estas restricciones pueden aparecer extrañas a primera vista, pero recuérdese de que una de las relaciones entre el problema directo y dual (párrafo , sección) es: una limitación inefectiva en el problema dual implica un valor cero en la correspondiente variable directa. Por lo tanto, habiendo pérdidas, al usar precios internos, la actividad correspondiente <u>no está utilizada</u> (su escala es cero). En cambio, todas las actividades de escala positiva producen utilidades exactamente iguales a cero (a precios internos). De ahí que el sistema de programación lineal establece precios internos de contabilidad dentro de la empresa actúan exactamente de la misma manera como los precios de mercado actuarían en un sistema de competencia perfecta.

./.

<u>PROBLEMA</u>: Describa la organización y las características de un sistema hipotético de competencia perfecta correspondiente a la empresa del Modelo 2.

La función del problema dual es $w = b_5y_5 + \ldots + b_{10}y_{10}$.

Esta función se interpreta como el <u>valor de contabilidad de todas</u> restricciones (máximas) sobre las escalas de las actividades. En la solución del problema dual, esta función tiene un mínimo que es igual al máximo de la función del problema directo (veáse párrafo , Sec.). Entonces, el valor de contabilidad mínimo de todas las restricciones es igual a las utilidades máximas de la empresa a precios del mercado. En otras palabras, <u>el sistema de programación lineal distribuye las utilidades máximas de la empresa entre las restricciones</u> (de escala) <u>efectivas</u>. (Acuérdese que las variables duales correspondientes a restricciones inefectivas son cero).

7. Existen algunas relaciones interesantes entre los siguientes "elementos marginales" del Modelo 2 (los cuales se escriben en los márgenes del cuadro): variables directas, variables duales, constantes de precio y constantes de restricción.

En ilustraciones 1 y 2 se presentan las relaciones pertenecientes a ventas de productos y a compras de factores. Estas actividades tienen precios de mercado fijos; sin embargo, <u>los valores internos de los factores y de los productos no son necesariamente iguales a estos precios de mercado</u>.

En los párrafos siguientes vamos a discutir las relaciones entre los valores internos y los precios de mercado. Haremos comparaciones <u>de soluciones diferentes correspondientes a varios proble-</u>

./.

mas cuya estructura de coeficientes de insumos y de productos es diferente, y no de valores diferentes de las variables de un problema dado.

(a) Las variables duales de los valores internos corresponden a las balanzas de factores y de productos. Si en la solución una balanza no es efectiva esto significa el desperdicio de un factor o de un producto. En consecuencia, en tales casos de la desigualdad fuerte, la variable dual correspondiente es cero. Entonces, el valor interno de un factor o de un producto no puede exceder de cero, a menos que la balanza correspondiente esté satisfecha con una igualdad exacta. En lo que sigue, supondremos de que éste sea el hecho.

(b) El valor interno de un factor o de un producto es igual a su precio de mercado cuando su escala de compra o de venta en la solución es mayor que cero, pero es menor que la limitación correspondiente sobre la escala de compra o de venta.

(c) Cuando la limitación en la escala de compra o de venta es efectiva en la solución, la diferencia entre precios de mercado y el valor interno corresponderá a una nueva variable dual que será designada como una "renta interna" sobre la oportunidad escasa de compra o de venta. Un estudio cuidadoso de las ilustraciones 1 y 2 demuestra que en tales casos existe una diferencia favorable (del punto de vista de la empresa) entre valor interno y el precio de mercado. (Para ventas, el valor interno es menor que el precio de mercado, lo que significa que el mercado pone una valuación más alta sobre el producto que el sistema de contabilidad de la empre-

./.

sa misma; y vice versa con respecto a compras). Sin embargo, aparece una nueva variable dual que aprovecha esta diferencia favorable y la asigna como "renta interna" (de contabilidad) a la oportunidad escasa de venta o de compra.

(d) Cuando la diferencia entre un valor interno y el correspondiente precio de mercado en la solución es desfavorable desde el punto de vista de la empresa, la actividad no estará incluída en el programa. (Su escala será cero).

En las ilustraciones, se demuestra el cambio de la relación entre el valor interno y el precio de mercado fijo cuando la escala de compra o de venta cambia en la solución. Obsérvese que el gráfico de venta es similar a un gráfico convencional de demanda en el cual una cantidad forma el eje horizontal y un precio forma el eje vertical. La diferencia principal entre un gráfico de venta y un gráfico convencional de demanda consiste en que un gráfico convencional de demanda muestra un decrecimiento gradual de su precio al subir su cantidad, mientras que en un gráfico de venta el precio (valor interno) baja en el modelo, un escalón, al subir la cantidad (escala de venta).

Igualmente, el gráfico de compra es similar a un gráfico convencional de oferta.

8. En las ilustraciones 1 y 2, se presentan las relaciones matemáticas que forman la base de las descripciones en los párrafos (b) hasta (d) de la sección anterior. Estas relaciones matemáticas forman una aplicación del principio que sostiene que desigualdades fuertes en la solución del problema directo implican un

./.

valor cero en la variable dual correspondiente y que desigualdades fuertes en la solución del problema dual implican un valor cero en la variable directa correspondiente. (Véase párrafo , Sec. del capítulo anterior). Además, en la ilustración 3 se desarrollan relaciones semejantes para actividades de producción que contienen el "valor agregado interno" de la producción en lugar de simples valores internos de un solo factor o producto.

PROBLEMAS: 1) Haga una interpretación verbal detallada de la ilustración 3.

2) Desarrolle las relaciones matemáticas correspondientes a las Figuras B (Ilustraciones 1 y 2) y B y C (Ilustración 3).

3) ¿Qué pasa cuando existen limitaciones conjuntas para las escalas de algunas actividades?

9. En las secciones anteriores se presentó una interpretación del Modelo 2. En ese modelo, se encontraron dos tipos de restricciones:

a) balanzas de factores y de productos;
b) limitaciones sobre las escalas máximas de las actividades de producción, de venta y de compra.

En esta sección vamos a introducir limitaciones sobre las escalas mínimas de las actividades de producción, de compra y de venta.

Limitaciones de este tipo pueden tener su origen en diversas situaciones prácticas. Por ejemplo, pueden existir contratos legales que especifiquen que la empresa compre al menos una cantidad

./.

mínima de un factor determinado. O bien, que la empresa puede seguir la política de producir una serie completa de algunos productos interrelacionados, aunque uno o dos de estos no produzcan ganancias.

El Modelo 3 representa un problema de programación lineal que contiene este tipo de limitación mínima sobre todas las actividades de producción, de compra y de venta. Algunas consideraciones sobre estas limitaciones son completamente análogas con las consideraciones ya discutidas en relación con las limitaciones máximas. (a) En muchos problemas prácticos se necesitan todas estas limitaciones, bastan solamente algunas. Aunque solamente algunas (o ningunas) de estas limitaciones serán efectivas para la solución. (b) Podrían existir limitaciones mínimas conjuntas sobre las escalas de varias actividades.

Una diferencia importante entre las limitaciones máximas y las limitaciones mínimas consiste en el hecho de que las limitaciones mínimas operan en el sentido contrario a la expansión de la empresa. Habiendo, por lo tanto, algunas actividades productivas que conduzcan a utilidades positivas, todas las limitaciones mínimas pueden ser omitidas, sin que esto signifique una expansión indefinida de la empresa. La tarea de impedir una expansión indefinida corresponde a las restricciones máximas. En cambio, imaginémosnos una situación en que las relaciones entre los precios de los factores y de los productos son tales que todas las actividades productivas conduzcan a una pérdida: en este caso, la empresa va a bajar al nivel de estas actividades a cero, a menos que las limita-

./.

ciones sobre algunas escalas mínimas se lo impidan. Existiendo estas limitaciones mínimas, la solución del problema lo constituirá una estructura productiva que minimiza las pérdidas, consistente con las escalas mínimas prescritas, y no un nivel de producción de cero.

10. Las variables duales relacionadas con las restricciones mínimas pueden interpretarse como "subsidios internos" de contabilidad. Estos "subsidios internos" se asignan a actividades que no podrían operar sin pérdidas (a precios internos) careciendo de ellos. Esta interpretación resulta mucho más clara al considerar las interrelaciones de las variables directas y duales y las constantes de precio y de limitación. (Véase ilustraciones 4 y 5).

Las restricciones del problema dual tienen las siguientes formas:

<u>Producción</u>

$(-a_{11}y_1 - a_{12}y_2 + k_{11}y_3 + {}_{21}y_4) \leqslant$	y_5	$-y_{11}$	(9)
valor agregado del primer proceso productivo a precios internos	renta interna del primer proceso productivo	subsidio interno del primer proceso productivo	

<u>Compra</u>:

$y_1 \leqslant$	c_3	$+y_7$	$-y_{13}$	(10)
valor interno del primer factor	precio de mercado del primer factor	renta interna de la actividad de compra del primer factor	subsidio interno sobre la actividad de compra del primer factor	

<u>Venta</u>:

$y_3 \geqslant$	c_5	$-y_9$	$+y_{15}$	(11)
valor interno del primer producto	precio de mercado del primer producto	renta interna de la actividad de venta del primer producto	subsidio interno sobre la actividad de venta del primer producto.	

La interpretación de estas restricciones es semejante a la interpretación ya representada para el caso en que no existían limitaciones mínimas. Para las actividades de ventas y de compras las ilustraciones 4 y 5 demuestran que el valor interno de un producto o de un factor es igual al precio de mercado cuando la escala de la actividad de venta o de compra está entre el máximo y el mínimo. Cuando la escala es igual a la limitación máxima, el precio de mercado es modificado por una "venta interna" que está representada por una variable dual correspondiente a la limitación máxima dentro del Modelo 3. Esta venta es exactamente suficiente para eliminar las utilidades que aparecerían a precios internos de contabilidad. En cambio, cuando la escala de compra o de venta es igual a la limitación mínima, el precio de mercado se modifica por un "subsidio interno" que es exactamente suficiente para eliminar las pérdidas que aparecerían a precios internos de contabilidad.

La función del problema dual consiste en una suma algebraica de los productos de las rentas internas por los límites máximos, menos los productos de los subsidios internos por los límites mínimos.

$$w = b_5y_5 + \ldots + b_{12}y_{12} - b_{13}y_{13} - \ldots - b_{20}y_{20} \qquad (12)$$

En otras palabras esta función significa el valor de los límites máximos, a precios de subsidios internos. El mínimo de esta función es igual al máximo de la función directa que significa las utilidades de la empresa. Por lo tanto, la solución del sistema distribuye las utilidades de la empresa, aumentadas por el valor

./.

de los subsidios internos, entre los límites máximos efectivos de las varias actividades.

En la Ilustración 6, se presenta una sinopsis de las distintas configuraciones de precios y de restricciones.

PROBLEMAS. 1) Dé una descripción matemática y verbal del efecto de una limitación mínima sobre la escala de una actividad de producción. Use los patrones de las Ilustraciones 3 y 5.

2) Prepare un análisis detallado (a) de las diferencias y b) de las analogías de los Modelos 2 y 3.

3) Prepare un análisis matemático y verbal de los varios casos de limitaciones y de precios presentados en la Ilustración 6.

11. Los productos intermediarios se pueden incluir en los modelos sin dificultad alguna. Desde el punto de vista de la empresa, productos intermediarios pueden ser de varios tipos:

a) Los que no se compran ni se venden, solamente se producen y consumen dentro de la empresa;

b) los que se producen y consumen dentro de la empresa y además se pueden vender;

c) los que se consumen dentro de la empresa y además se pueden producir o comprar;

d) los que se consumen dentro de la empresa y además se pueden producir, comprar o vender (los precios de compra y de venta en el mercado pueden ser diferentes).

Para formular un modelo general (véase Modelo 4) no se necesita distinguir los varios tipos de productos intermediarios. Las

./.

actividades de producción cambian solamente en cuanto a que ahora se pueden encontrar insumos de productos intermediarios. En el modelo, tales insumos aparecen con un coeficiente k positivo (en los modelos anteriores, todos los k eran negativos). Además, aparecen actividades de compra de productos intermediarios a precios fijos de mercado. Las actividades de venta de productos no varían; la única diferencia con respecto a modelos anteriores es que algunas de estas actividades de venta se refieren ahora a productos que pueden actuar como insumos de otras actividades de producción.

Las balanzas de factores quedan como eran y las balanzas de productos también mantienen su forma anteriores, con la única diferencia de que las actividades de compra de productos intermediarios contribuyen un término adicional.

PROBLEMA: Analice las interrelaciones de variables directas y duales y de constantes de precios y de limitación en el Modelo 4.

12. Los modelos 2,3 y 4 tienen formulaciones alternativas en las cuales las actividades de compra y de venta no aparecen en forma explícita. Estas formulaciones están basadas en el hecho de que la lógica del sistema no permite soluciones donde existen desperdicios de factores o de productos, siempre que los precios de mercado de estos productos o factores sean mayores de cero. Luego, usando las balanzas como ecuaciones, podemos obtener expresiones para las variables de las escalas de ventas o de compras en términos de las actividades productivas, y susbtituirlas en las inecuaciones de los límites máximo y mínimos. Los precios de compra y de venta

./.

se usan de manera semejante para establecer valores de mercado para las actividades productivas. Por ejemplo, el Modelo 3 se puede transformar en el Modelo 5.

Las funciones directas y duales del Modelo 5 son las mismas que las del Modelo 3. La forma exacta de la función del problema directo es diferente en los dos modelos, pero la interpretación de la función es igual: significa las utilidades de la empresa a precios de mercado.

Las soluciones para las variables directas y duales incluídas en el modelo son también las mismas. En cambio, las restricciones son diferentes; en el problema directo, las balanzas están ausentes y también las variables duales correspondientes que significan valores internos, están ausentes; en el problema dual, tenemos restricciones conjuntas sobre las ventas internas y los subsidios internos que tienen un menor grado de claridad que las restricciones duales en el Modelo 3, aunque tengan el mismo significado económico.

Finalmente, hay numerosas formulaciones alternativas que pueden considerarse como transiciones entre las formulaciones del Modelo y del Modelo 5, manteniendo algunas actividades de compra o de venta en forma explícita y condensando las otras de la manera correspondiente al Modelo 5.

PROBLEMAS: 1) Dé una interpretación verbal de las restricciones duales en el Modelo 5.

2) Elimine las actividades de compra del Modelo 3, condensándolas de la manera correspondiente al Modelo 5, y dejando las actividades de venta en su forma explícita.

./.

13. En las secciones anteriores, se discutió el planteamiento del problema de producción de una empresa que tiene que confrontar precios fijos de mercado. Los modelos obtenidos pueden reinterpretarse con facilidad, para representar sistemas económicos de competencia perfecta en una industria, en un sector, o en una economía compleja compuesta de varios sectores.

Comenzaremos esta reinterpretación basándonos en el Modelo 3.

Las actividades en un modelo de competencia perfecta tienen que considerarse como un conjunto de empresas individuales que forman parte de una industria, una industria entera o un sector industrial. La escala de estas actividades se refiere a la producción, compra o venta total del conjunto de las empresas que forman la actividad. Las balanzas y limitaciones se refieren a la totalidad del uso de un factor o de la producción de un bien por todas las empresas que forman las varias actividades. Las variables duales correspondientes a las balanzas que significaban valores internos de contabilidad dentro de la empresa, ahora se reinterpretan como precios de mercado; las variables duales que significaban rentas y subsidios internos ahora se reinterpretan como rentas y subsidios actuales, pagados por unas empresas individuales a otras empresas individuales.

Tomando en cuenta las reinterpretaciones de las variables duales, ¿cuál es el significado de los precios fijos a los pies de las columnas? Aparentemente, hay más que un precio para cada factor o cada producto: un precio fijo constante y un precio de variable dual.

./.

La interpretación de los precios fijos es el elemento crítico del problema. Estos precios tienen su origen fuera del sistema comparativo considerado en el modelo. Por ejemplo, si el modelo se refiere a un sector industrial, los precios fijos de los factores básicos pueden ser determinados por la interacción de todos los sectores de la economía, y desde el punto de vista del sector estudiado aparecen como constantes. (Al menos, este es el caso en la primera aproximación; actualmente, cada sector individual tiene un cierto grado de influencia sobre los precios básicos dentro de la economía total). Los precios fijos de los productos pueden ser impuestos sobre el modelo de un sector de manera similar por otros sectores o por la competencia extranjera. Igualmente, en un modelo de la economía total de un país, los precios fijos pueden ser impuestos por el comercio exterior. De todas maneras, los precios fijos son impuestos osbre el modelo desde afuera.

Las Ilustraciones 1, 2, 4 y 5 demuestran las relaciones entre los precios fijos y los precios variables. En el modelo competitivo, todos los precios correspondientes a variables duales son precios de mercado que afrontan las empresas individuales. Las restricciones duales especifican ahora que ninguna empresa puede obtener utilidades positivas, a precios de mercado (incluyendo rentas y subsidios), que figuran en el modelo. Las empresas que producen tienen utilidades iguales a cero (esta condición es familiar a un sistema de competencia perfecta); mientras que las actividades potenciales que conducen a pérdidas (a precios de mercado) no se realizarán con escalas positivas.

./.

Como se puede ver en las ilustraciones, el precio variable correspondiente a una balanza es igual al precio fijo impuesto sobre el modelo en caso que ni la limitación máxima ni la limitación mínima sean efectivas. Si una limitación máxima es efectiva, se produce una diferencia favorable desde el punto de vista de la empresa individual, pero ésta es "aprovechada" por una renta que se determina de manera competitiva y que las empresas particulares pagan a la empresa (o al gobierno o al individuo) que controla el racionamiento de acceso a la oportunidad limitada de producción, de venta o de compra. En cambio, si una limitación mínima es efectiva, se produce una diferencia desfavorable y se requiere un subsidio determinado de manera competitiva que se debe pagar a las empresas (por un gobierno o por otras instituciones) para que la limitación mínima pueda satisfacerse.

En resumen, los precios fijos tienen una naturaleza de precios impuestos sobre el sistema que pueden definir los precios de mercado por una renta o por un subsidio determinados de manera competitiva.

La reinterpretación de las funciones que se maximizan o minimizan se presentará más adelante.

14. En investigaciones prácticas de un sistema competitivo, ya sea de una industria, de un sector o de la economía entera de un país, es raro encontrar semejanzas completas entre el Modelo 3 (o del Modelo 4 que es su generalización, incluyendo productos intermediarios), y <u>todos</u> los precios impuestos desde afuera del sistema y <u>todas</u> las limitaciones máximas y mínimas que se realizan en

./.

la actualidad. Es más típico que existan algunos precios impuestos desde afuera y algunas limitaciones máximas y mínimas.

Analizando un sector, por lo general, los precios de los factores básicos y los precios de productos intermediarios comprados a otros sectores son impuestos desde afuera. Además, los precios de los productos que se exportan o que se venden a otros sectores también pueden ser impuestos. En cuanto a restricciones, por lo general, no se encuentran limitaciones máximas sobre las compras con la posible excepción de materias primas provenientes de ciertas fuentes preferidas. Limitaciones mínimas pueden aparecer por varias razones; por ejemplo, se puede especificar una escala mínima de producción de algunos bienes estratégicos, o una escala mínima de utilización de mano de obra en casos de desempleo.

En el estudio de la economía entera de un país, por lo general una variedad de precios de importación y de exportación se imponen desde afuera. Además, debido a razones sociales y políticas, se puede especificar un precio fijo para la mano de obra. En cuanto a restricciones, se pueden encontrar limitaciones máximas sobre las exportaciones y sobre el uso de divisas. (En tales modelos, es casi siempre aconsejable designar actividades distintas para ventas internas y exportaciones, por un lado, y para compras internas e importaciones, por el otro). Además, existen límites máximos sobre las disponibilidades de factores, y límites mínimos pueden imponerse sobre las escalas de producción de algunos sectores o sobre el empleo de la mano de obra.

./.

15. En la función del problema directo tanto como en la función del problema dual aparecerán <u>precios de mercado</u>, estando satisfechas las siguientes condiciones:

a) Las actividades que tienen precios fijos impuestos desde fuera, no serán sujetas a limitaciones máximas o mínimas.

b) Compras que no tienen precios fijos serán sujetas solamente a limitaciones máximas.

c) Ventas que no tienen precios fijos serán sujetas solamente a limitaciones máximas.

<u>PROBLEMA</u>. Compruebe las afirmaciones arriba presentadas. Use el Modelo 3 y las relaciones apropiadas entre las limitaciones efectivas y las escalas de las variables duales correspondientes. Recuérdese que las variables duales correspondientes a las balanzas son los precios de mercado.

Cuando en las funciones del problema directo y del problema dual aparecen solamente precios de mercado, la solución del sistema es equivalente al maximum del ingreso nacional (en un modelo de la economía entera) o la parte del ingreso nacional correspondiente a un sector o a una industria (en un modelo parcial). Cada adición de precios fijos nuevos o de otras limitaciones efectivas a un tal "sistema eficiente" implica la distorsión de la estructura de producción.

<u>PROBLEMA</u>. ¿Cuál es la función que se maximiza en el problema directo y cuál es la que se minimiza en el problema dual en un sistema de competencia perfecta correspondiente al Modelo 3?

./.

Un "sistema eficiente" se puede plantear en varias maneras. Se requiere por lo menos un solo precio fijo que sirva como medida para otros precios del modelo; este es el equivalente (en la función directa) de maximición de la cantidad de un solo producto, o de minimización de la cantidad de un solo factor, con todos los otros factores y productos ya prescritos. O bien, se pueden fijar los precios de algunos factores o de algunos productos, o de combinaciones de ellos; pero para asegurar la existencia de una solución se necesita mantener un suficiente número de restricciones en el "sistema eficiente". (En caso extremo, si todos los precios son fijos y no hay limitaciones, sólamente balanzas, obtenemos el sistema del Modelo 1 que no tiene solución).

PROBLEMA. Construya un "sistema eficiente" de competencia perfecta,

a) con precios fijos para todos los factores, pero ninguno para los productos;

b) con precios fijos para todos los productos pero ninguno para los factores;

c) con el precio de un solo factor fijo;

d) con el precio de un solo producto fijo.

16. Los diversos modelos de competencia perfecta se pueden condensar (eliminando las actividades explícitas de compras y de ventas) de la misma manera que en el caso de los modelos correspondientes de empresas.

./.

PROBLEMA Condense los modelos a), b) c) y d) del problema anterior.

17. Un modelo muy importante para un sistema eficiente de competencia perfecta puede obtenerse (para una economía entera)por una generalización de modelos de insumo y producto de Leontief ("input-output"). Modelos generales de este tipo pueden usar toda la información empírica contenida en los cuadros de Leontief existentes para varios países. En el hecho, existencias de Leontief constituyen un caso especial de modelos de programación lineal muy simplificados, donde a) cada industria es representada por una sola actividad, siendo que en los modelos de programación lineal se pueden incluir actividades alternativas para cada industria en caso que así se desee; b) cada industria tiene solamente un producto siendo que los productos juntos son permisibles; c) en este sistema se incluye solamente un factor, mientras que por lo general se pueden considerar restricciones sobre varios factores.

En virtud de estas simplificaciones, la solución de sistemas de Leontief se puede obtener a través de métodos más simples (inversión de matrices) que los métodos para resolver problemas generales de programación lineal.

Un sistema de Leontief en la notación de programación lineal se presenta en el Modelo 6, en dos formas alternativas. En la forma A, el aspecto del modelo es muy semejante a un cuadro de Leontief en su forma normal; solamente aparecen desigualdades en lugar de igualdades, y para obtener el sentido requerido de los signos de desigualdad, los signos algebraicos están invertidos. Se puede demostrar que en condiciones especiales del sistema de Leontief, to-

./.

das las restricciones directas y duales son efectivas. Por esta razón, el uso de desigualdades débiles es equivalente al uso de igualdades exactas.

En la forma B del Modelo 6, las actividades de compra y de venta están escritas explícitamente. Hay sólamente un precio fijo, el de la mano de obra; este precio es arbitrario y se fija en 1. Se imponen limitaciones mínimas sobre las ventas que son iguales a las demandas finales. Como se ve, cuando hay producciones positivas,

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = y_4$$

$$y_3 = y_5$$

Estas variables duales son precios de mercado que representan insumos directos e indirectos del solo factor, mano de obra.

De las restricciones duales de la parte A del Modelo 6, en forma de igualdades exactas, se obtiene:

$$y_1 = \frac{(-l_1)(a_{22}-1)-(-l_2)a_{21}}{(a_{11}-1)(a_{22}-1) - a_{12}a_4} = l_1\ A_1 - l_2\ A_2$$

$$y_2 = \frac{(-l_1)(a_{11}-1)-(-l_2)a_{12}}{(a_{11}-1)\ (A_{22}-1)-a_{12}a_{21}} = l_1\ A_3 - l_2\ A_4$$

Las A son los coeficientes familiares de la matriz inversa del sistema de Leontief.

18. El inconveniente práctico más importante del sistema de Leontief es el que los precios duales incluyen no más que los efectos de un solo factor. Si se pudieran obtener precios duales que

./.

incluyan los efectos debidos a restricciones sobre las disponibilidades de varios recursos fundamentales dentro de la economía (mano de obra, capital, divisas, capacidades de producción de materiales básicos), estos precios podrían utilizarse en estudios sectoriales o en la evaluación de proyectos individuales como medidas para los costos de oportunidad.

En el hecho un sistema empírico de Leontief se puede generalizar con esfuerzos razonables de tal manera que incluya restricciones múltiples sobre los recursos. Por lo general, también se deben incluir actividades alternativas de importación y de exportación (dentro de las industrias individuales o en el sistema de Leontief, las proporciones del comercio exterior con respecto a la producción son fijas); además, se pueden incluir procesos de producción alternativos (por ejemplo, procesos intensivos en el uso del capital y otros procesos intensivos en el uso de la mano de obra). El trabajo empírico que se necesita para tal generalización consiste principalmente en la compilación de coeficientes de insumos de los varios factores escasos, y además de la desagregación de industrias si se requieren procesos de producción alternativas.

19. Problemas de localización de actividades económicas pueden tratarse con mucha facilidad a través de modelos de programación lineal. Estos problemas pueden encontrarse en conexión con las operaciones de una empresa, o en conexión con el equilibrio económico de un sistema competitivo. Como se discutió en secciones anteriores, los moldes generales de modelos de una empresa y de un sistema competitivo son muy semejantes; por esto, la discu-

./.

sión de problemas de localización se puede extender sobre ambos casos de un modo conjunto.

Los problemas más sencillos de este tipo se pueden tratar con técnicos más simples que la programación lineal. Por ejemplo (a) la mejor ubicación de una empresa que usa un solo proceso productivo, con dos o tres materias primas principales y un producto, se puede obtener a través de métodos geométricos. Un otro método que se puede usar es el de calcular la suma de los costos de producción y los costos de transporte sobre las materias primas y el producto, repitiendo esta calculación para los principales puntos alternativos de localización. (b) Si hay varias empresas que producen un producto dado, y se conocen los distintos costos de producción, métodos geométricos o métodos simples de computación pueden utilizarse para predecir la mejor distribución de este producto en un mercado esparcido sobre una área geográfica extensa. (c) Un problema muy similar al problema anterior es el de predecir la mejor distribución espacial del abastecimiento de un bien que se usa en distintos puntos dados y que se produce en unidades productivas esparcidas sobre una superficie geográfica.

En cambio, los métodos simples no pueden tratar, de algún modo satisfactorio, con problemas en los cuales distintos procesos productivos, varios productos y varias materias primas, diferentes mercados y distintos puntos de localización simultáneamente desempeñan papeles importantes. Este tipo de problema, sin embargo, se encuentran en muchos estudios de sectores industriales y en inves-

./.

tigaciones del desarrollo regional. Ellos se pueden resolver solamente con una técnica más efectiva: la programación lineal.

20. Para tratar con problemas de localización a traves de programación lineal, es conveniente hacer distinciones entre cuatro grupos de rubros de insumo y producto: factores inmoviles, factores móviles (incluyendo materias primas), productos intermediarios y productos finales. Las actividades mismas se clasifican en actividades de producción, de compras de factores y productos intermediarios, de ventas de productos intermediarios y de productos finales, y de transporte de factores y de productos.

21. Como en los modelos anteriores, hay tres tipos de restricciones en el modelo directo (a los cuales corresponden variables duales): balanzas, limitaciones máximas y limitaciones mínimas.

(1) En modelos especiales, se requieren balanzas distintas de cada factor en todos los lugares donde se compra y donde se usa en la producción y de cada producto donde figura en la producción y donde se vende. Las variables duales correspondientes tienen el sentido de precios internos de contabilidad cuando se trata de un modelo de una empresa; o de precios de mercado cuando se trata de un modelo de competencia perfecta. Como se puede ver, en la solución del problema dual se obtienen precios distintos correspondientes a cada lugar donde se compra, usa o vende algo; en otras palabras, se obtiene una estructura especial de precios.

(2) Las restricciones máximas y mínimas desempeñan el mismo papel, tienen el mismo significado económicos y son liadas a las

./.

variables duales de igual manera que en los modelos discutidos en secciones anteriores.

22. Como en modelos no especiales, existen formas "condensadas" de los modelos en los cuales todas o algunas actividades de compra y de venta son eliminadas. Estas formas condensadas de modelos especiales tienen un más alto grado de transparencia y por esto son más útiles que las formas condensadas de los modelos anteriores, porque las actividades de transporte pueden interpretarse como compra en lugar A y una venta en lugar B. De los cuatro modelos espaciales presentados aquí, los Modelos 7,8 y 10 son formas condensadas.

23. El concepto de "eficiencia" de un sistema competitivo se puede extender sin algunas dificultades a los modelos espaciales. Todos los sistemas espaciales presentados en los Modelos 7 hasta 10 son eficientes. En un sistema eficiente, no se encuentran limitaciones mínimas efectivas sobre las escalas de las actividades de transporte.

PROBLEMAS:

(1) Dé una interpretación verbal de los modelos presentados.

(2) Presente las formas no condensadas de los modelos 7,8 y 10.

(3) Incluya una limitación individual máxima sobre la escala de una actividad de transporte en cada modelo. Qué es la diferencia entre tal restricción y las restricciones máximas juntas que se encuentran en estos modelos?

./.

~~A N E X O~~ 2

(Modelos e Ilustraciones)

Modelo 1

A.

Escalas de

Producción Compra Venta

Variables duales	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\leqslant$	
y_1	a_{11}	a_{12}	-1				0	balanzas de factores
y_2	a_{21}	a_{22}		-1			0	
y_3	$-k_{11}$	$-k_{12}$			1		0	balanzas de productos.
y_4	$-k_{21}$	$-k_{22}$				1	0	
$\geqslant$	0	0	$-C_3$	$-C_4$	C_5	C_6		

precios de
factores productos

B.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\leqslant$
y_1	2	3	-1				0
y_2	3	2		-1			0
y_3	-4	-5			1		0
y_4	-5	-4				1	0
$\geqslant$	0	0	-3	-3	100	100	

C.

$x_1 = x_2 = 10$

10	10	50	50	90	90	=
20	30	-50				0
30	20		-50			0
-40	-50			$+90$		0
-50	-40				$+90$	0
0	0	-150	-150	9000	9000	

Suma 17.700

<u>Modelo 2</u>

Escalas de

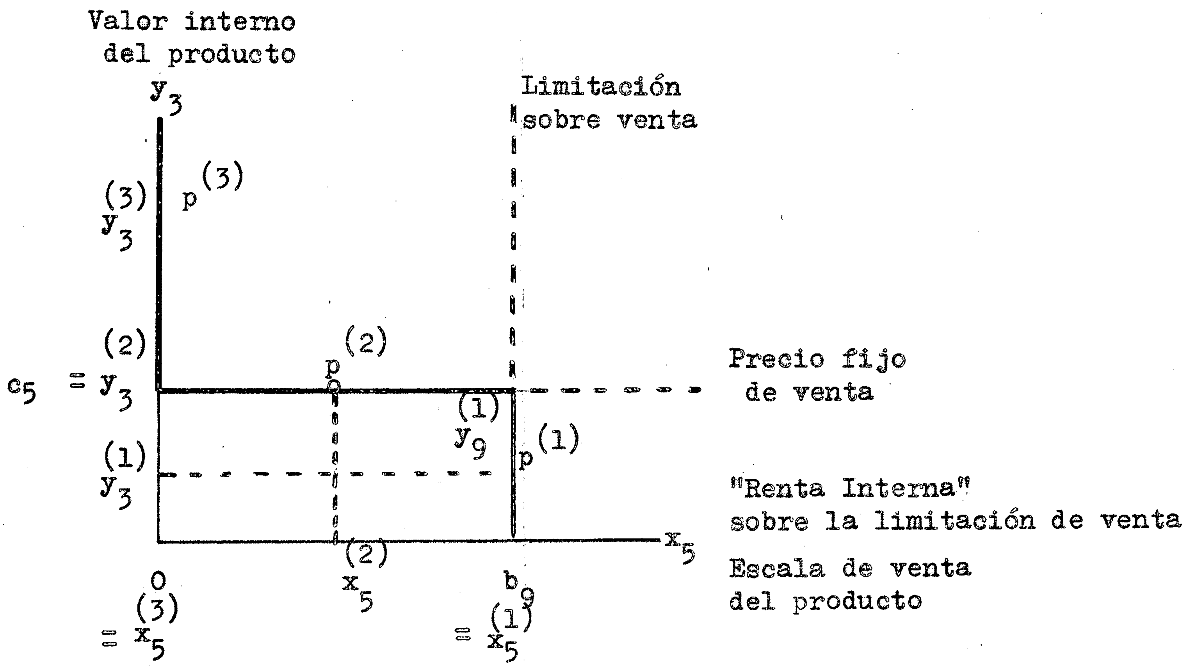
Producción Compras Ventas

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
Valores internos de	factores	y_1	a_{11}	a_{12}	-1				0	Balanzas de factores
		y_2	a_{21}	a_{22}		-1			0	
	productos	y_3	$-k_{11}$	$-k_{12}$			1		0	Balanzas de productos
		y_4	$-k_{21}$	$-k_{22}$				1	0	
"Rentas internas" sobre	producción	y_5	1						b_5	Límites sobre la producción
		y_6		1					b_6	
	compras	y_7			1				b_7	Límites sobre las compras
		y_8				1			b_8	
	ventas	y_9					1		b_9	Límites sobre las ventas
		y_{10}						1	b_{10}	
			0	0	$-C_3$	$-C_4$	C_5	C_6		

Precios de

factores productos

Ilustración 1
(Ventas)



$$p^{(1)} \quad x_5^{(1)} > 0 \ \text{(columna 5)} \quad \therefore \ y^{(1)} + y_9^{(1)} = c_5$$

$$x_5^{(1)} = b_9 \ \text{(línea 9)} \quad \therefore \ y^{(1)} \quad 0$$

$$y_3^{(1)} = c_5 \quad y_9^{(1)}$$

$$p^{(2)} \quad x_5^{(2)} > 0 \ \text{(Columna 5)} \quad \therefore \ y_3^{(2)} + y_9^{(2)\,0} = c_5$$

$$x_5^{(1)} < b_9 \ \text{(línea 9)} \quad \therefore \ y_9^{(2)} = \geq 0$$

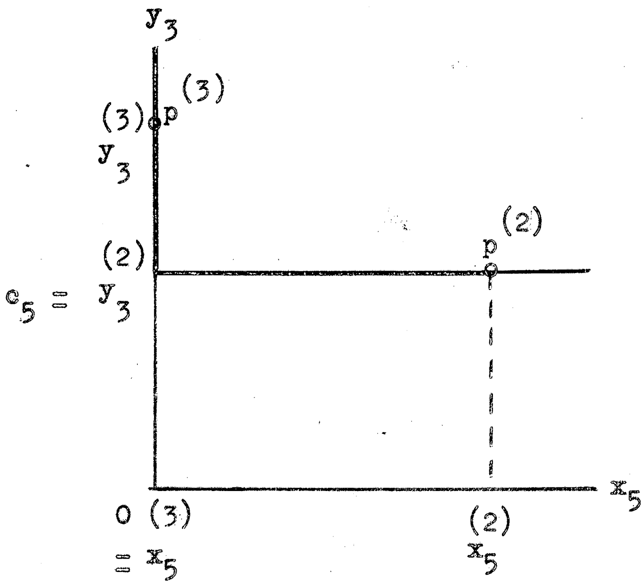
$$y_3^{(2)} = c_5$$

$$p^{(3)} \quad x_5^{(3)} = 0 \ \text{(Columna 5)} \quad \therefore \ y_3^{(3)} + y_9^{(3)} \geqslant c_5$$

$$x_5^{(3)} < b_9 \ \text{(línea 9)} \quad \therefore \ y_9^{(3)} = 0$$

$$y_3^{(3)} \geqslant c_5$$

Ilustración 1 (Cont.)



Si no hay limitación sobre la venta de un producto dado no existen puntos de tipo $p^{(1)}$. Las relaciones para $p^{(2)}$ y $p^{(3)}$ no cambian.

Ilustración 2

(Compras)

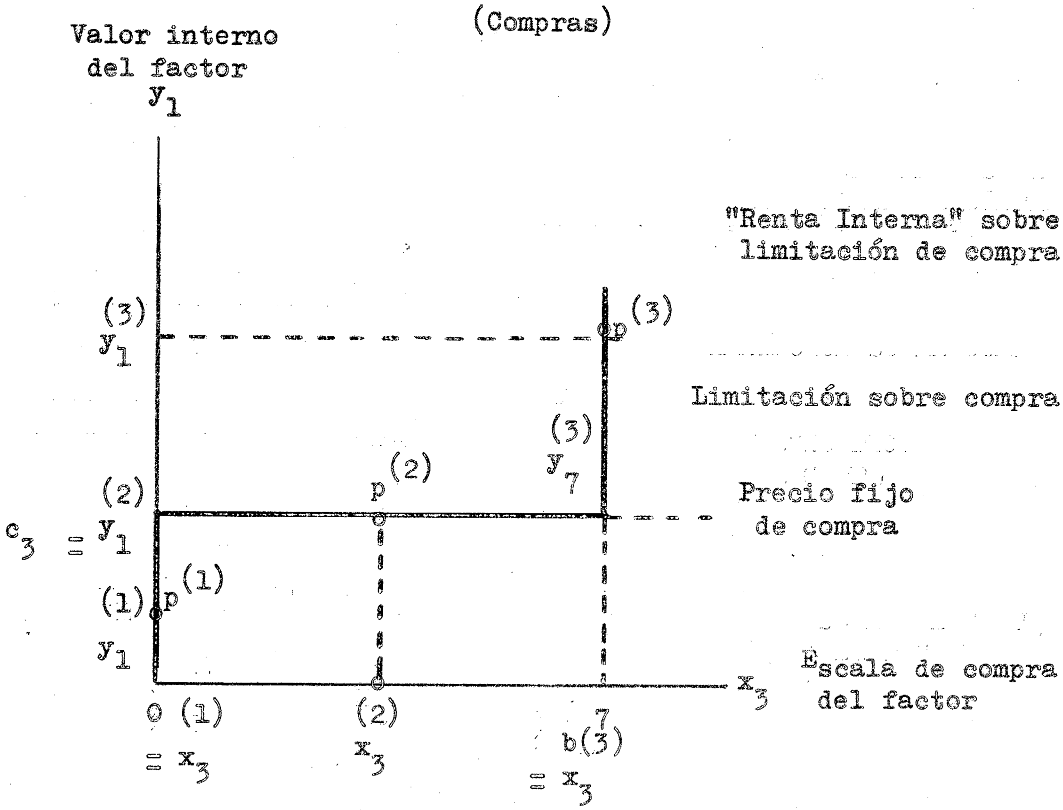


Ilustración 2 (Cont.)

$P^{(1)}$ $\quad x_3^{(1)} = 0$ (columna 3) $\quad \therefore \quad -y_1^{(1)} + y_7^{(1)0} \geqslant -c_3.$

$\quad x_3^{(1)} < b_7$ (línea 7) $\quad \therefore \quad y_7^{(1)} = 0$

$$y_1^{(1)} < c_3$$

$P^{(2)}$ $\quad x_3^{(2)} > 0$ (columna 3) $\quad \therefore \quad -y_1^{(2)} + y_7^{(2)0} = -c_3$

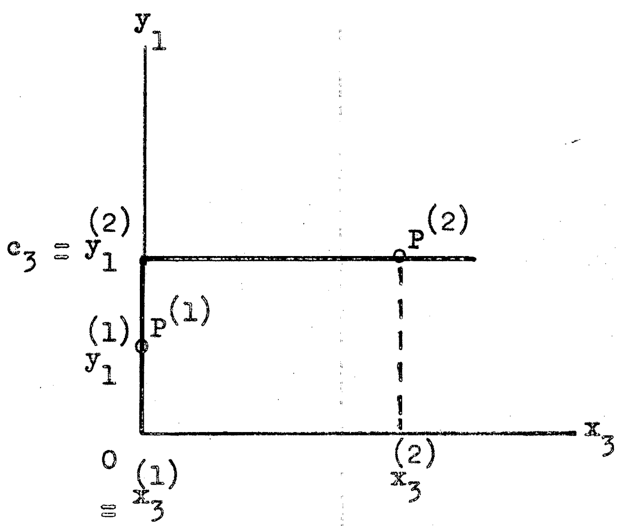
$\quad x_3^{(2)} < b_7$ (línea 7) $\quad \therefore \quad y_7^{(2)} = 0$

$$y_1^{(2)} = c_3$$

$P^{(3)}$ $\quad x_3^{(3)} > 0$ (columna 3) $\quad \therefore \quad -y_1^{(3)} + y_7^{(3)} = -c_3$

$\quad x_3^{(3)} = b_7$ (línea 7) $\quad \therefore \quad y_7^{(3)} \geqslant 0$

$$y_1^{(3)} = c_3 + y_7^{(3)}$$

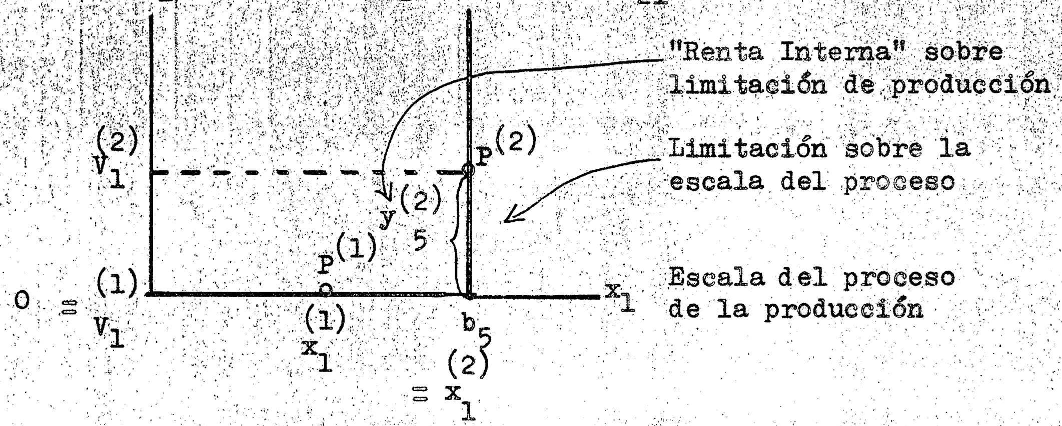


Si no hay limitación sobre la compra de un factor dado, no existen puntos de tipo $P^{(3)}$. Las relaciones para $P^{(1)}$ y $P^{(2)}$ no cambian.

Ilustración 3
(Producción)

Valor agregado interno del
proceso de la producción

$$V_1 = (-a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + k_{11}y_3 + k_{21}y_4)$$



$P^{(1)}$ $\quad x_1^{(1)} > 0$ (Columna 1) $\quad \therefore \quad -V_1^{(1)} + y_5^{(1)^0} = 0$

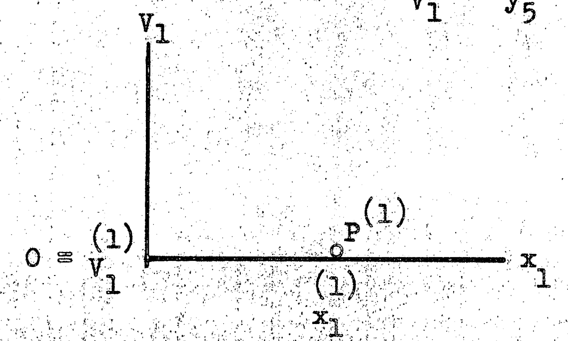
$x_1^{(1)} < b_5$ (línea 5) $\quad \therefore \quad y_5^{(1)} = 0$

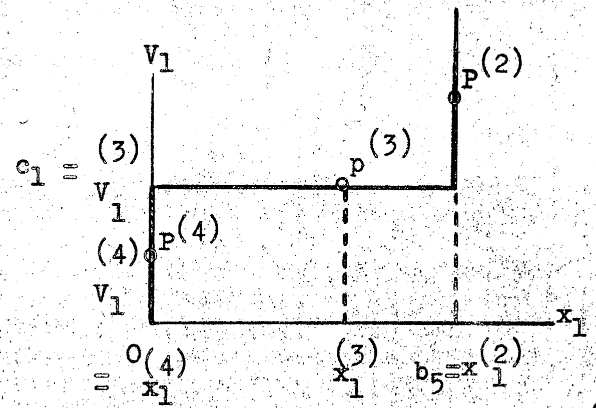
$$V_1^{(1)} = 0$$

$P^{(2)}$ $\quad x_1^{(2)} > 0$ (Columna 1) $\quad \therefore \quad -V_1^{(2)} + y_5^{(2)} = 0$

$x_1^{(2)} = b_5$ (línea 5) $\quad \therefore \quad y_5^{(2)} \geq 0$

$$V_1^{(2)} = y_5^{(2)}$$





(b) Si no hay limitación sobre la escala del proceso, no hay puntos de tipo $P^{(2)}$

(c) Si $c_1 \not\leq 0$, esto significa que existen algunos costos de producción que no son de carácter de gastos sobre factores (por ejemplo: impuestos). El resultante gráfico es análogo al gráfico "A" de la ilustración 2. Existe ambién el análogo del gráfico "B" de la misma ilustración

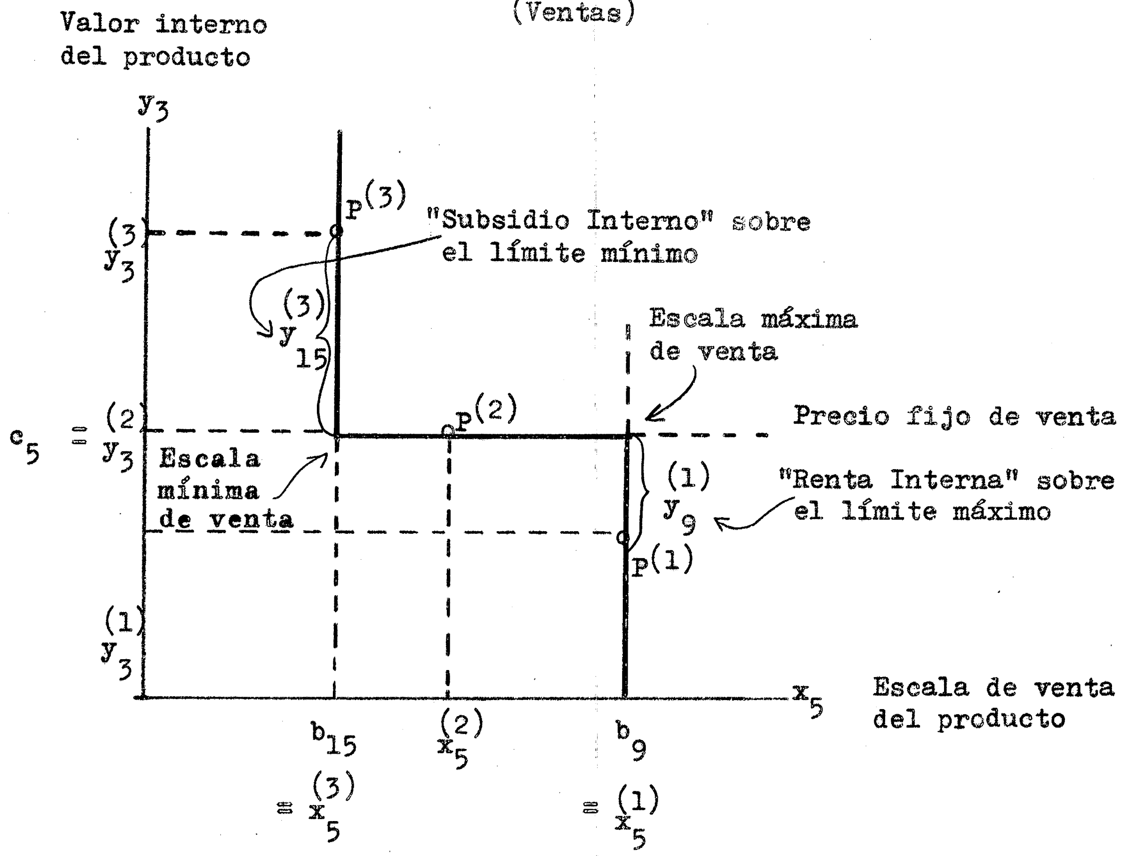
Modelo 3

Escalas de
Producción Compras Ventas

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\leqslant$	
Valor interno de	Factores	y_1	a_{11}	a_{12}	-1				0	balanzas de factores
		y_2	a_{21}	a_{22}		-1			0	
	Productos	y_3	$-k_{11}$	$-k_{12}$			$+1$		0	balanzas de productos
		y_4	$-k_{21}$	$-k_{22}$				$+1$	0	
"Rentas internas" sobre límites máximos de	Producción	y_5	$+1$						b_5	límites *máximos* sobre producción
		y_6		$+1$					b_6	
	Compras	y_7			$+1$				b_7	límites *máximos* sobre compras
		y_8				$+1$			b_8	
	Ventas	y_9					$+1$		b_9	límites *máximos* sobre ventas
		y_{10}						$+1$	b_{10}	
"Subsidios internos" sobre límites mínimos de	Producción	y_{11}	-1						$-b_{11}$	límites *mínimos* sobre producción
		y_{12}		-1					$-b_{12}$	
	Compras	y_{13}			-1				$-b_{13}$	límites *mínimos* sobre compras
		y_{14}				-1			$-b_{14}$	
	Ventas	y_{15}					-1		$-b_{15}$	límites *mínimos* sobre ventas
		y_{16}						-1	$-b_{16}$	
		$\geqslant$	0	0	$-C_3$	$-C_4$		C_6		

Precios de
factores productos

Ilustración 4
(Ventas)



$P^{(1)}$ $\quad x_5^{(1)} > 0 \quad \therefore + y_3^{(1)} + y_9^{(1)} - y_{15}^{(1)} = c_5$ (columna

$x_5^{(1)} > b_{15}$ (línea 15) $\quad \therefore y_{15}^{(1)} = 0$

$x_5^{(1)} = b_9$ (línea 9) $\quad \therefore y_9^{(1)} \geq 0$

$\therefore y_3^{(1)} = c_5 - y_9^{(1)}$

$P^{(2)}$ $\quad x_5^{(2)} > 0$ (columna 5) $\quad \therefore y_3^{(2)} + \overset{0}{y_9^{(2)}} - \overset{0}{y_{15}^{(2)}} = c_5$

$x_5^{(2)} > b_{15}$ (línea 15) $\quad \therefore y_{15}^{(2)} = 0$

$x_5^{(2)} < b_9$ (línea 9) $\quad \therefore y_9^{(2)} = 0$

$\therefore y_3^{(2)} = c_5$

Ilustración 4 (Cont.)

(Ventas)

$$p^{(3)} \quad x_5^{(3)} > 0 \ \text{(columna 5)} \quad \therefore \quad y_3^{(3)} + \overset{0}{y_9^{(\;)}} - y_{15}^{(3)} = c_3$$

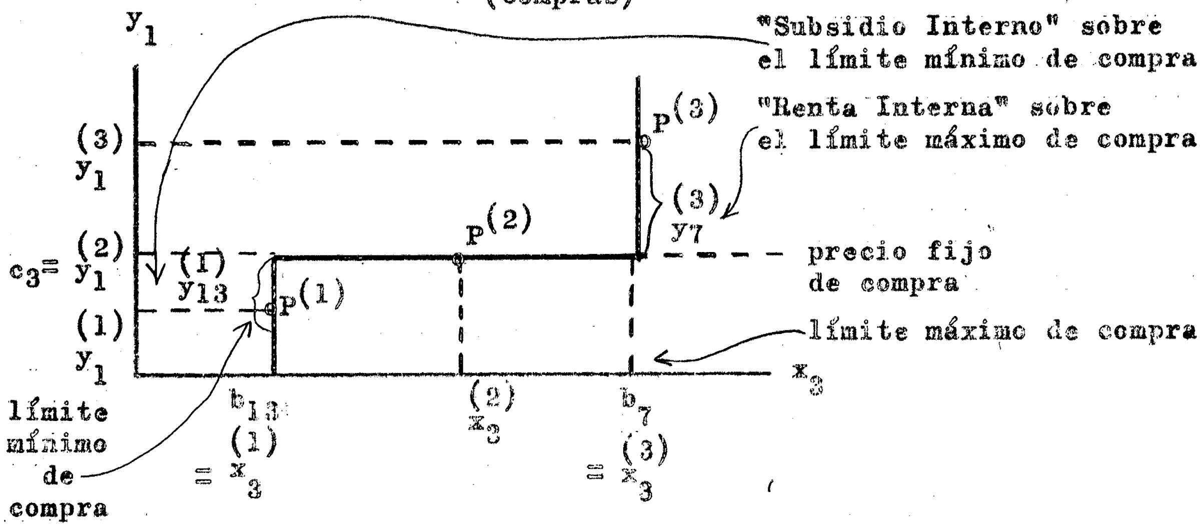
$$x_5^{(3)} = b_{15} \ \text{(línea 15)} \quad \therefore \quad y_{15}^{(3)} \geqq 0$$

$$x_5^{(3)} < b_9 \ \text{(línea 9)} \quad \therefore \quad y_9^{(3)} = 0$$

$$\therefore \quad y_3^{(3)} = c_5 + y_{15}^{(3)}$$

Ilustración 5

(Compras)



$$p^{(1)} \quad x_3^{(1)} > 0 \ \text{(columna 3)} \quad \therefore \quad -y_1^{(1)} + y_7^{(1)} - y_{13}^{(1)} = c_5$$

$$x_3^{(1)} = b_{13} \ \text{(línea 13)} \quad \therefore \quad y_{13}^{(1)} \geqslant 0$$

$$x_3^{(1)} < b_7 \ \text{(línea 7)} \quad \therefore \quad y_7^{(1)} = 0$$

$$y_1^{(1)} = c_3 - y_{13}^{(1)}$$

$$p^{(2)} \quad x_3^{(2)} > 0 \ \text{(columna 3)} \quad \therefore \quad -y_1^{(2)} + \overset{0}{y_7^{(2)}} - \overset{0}{y_{13}^{(2)}} = c_3$$

$$x_3^{(2)} > b_{13} \ \text{(línea 13)} \quad \therefore \quad y_{13}^{(2)} = 0$$

$$x_3^{(2)} < b_7 \ \text{(línea 7)} \quad \therefore \quad y_7^{(2)} = 0$$

$$y_1^{(2)} = c_3$$

Modelo 4

			Escalas de Producción		Compra de factores		Venta de productos finales o intermediarios		Compra de productos intermediarios			
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
Valores internos de	factores	y_1	a_{11}	a_{12}	-1						0	balanzas de factores
		y_2	a_{21}	a_{22}		-1					0	
	productos	y_3	$-k_{11}$	$-k_{1}$			1		-1		0	balanzas de productos
		y_4	$-k_{21}$	$-k_{22}$				1		-1	0	
"Rentas internas sobre límites maximos de	producción	y_5	1								b_5	límites maximos sobre producción
		y_6		1							b_6	
	compra de factores	y_7			1						b_7	límites máximos sobre compra de factores
		y_8				1					b_8	
	venta de productos	y_9					1				b_9	límites máximos sobre venta de productos
		y_{10}						1			b_{10}	
	compra de productos interm.	y_{11}							1		b_{11}	límites máximos sobre compra de prod. intermed.
		y_{12}								1	b_{12}	
"Subsidios internos" sobre límites mínimos de	producción	y_{13}	-1								$-b_{13}$	límites mínimos sobre producción
		y_{14}		-1							$-b_{14}$	
	compra de factores	y_{15}			-1						$-b_{15}$	límites mínimos sobre compra de factores
		y_{16}				-1					$-b_{16}$	
	venta de productos	y_{17}					-1				$-b_{17}$	límites mínimos sobre venta de productos
		y_{18}						-1			$-b_{18}$	
	compra de productos intermed.	y_{19}							-1		$-b_{19}$	límites mínimos sobre compra de prod. intermed.
		y_{20}								-1	$-b_{20}$	
			0	0	$-C_3$	$-C_4$	C_5	C_6	$-C_7$	$-C_8$		
					Precios de factores		productos (ventas)		productos intermed.			

Ilustración 5 (Cont.)
(Compras)

$$p^{(3)} \qquad x_3^{(3)} > 0 \quad \text{(columna 3)} \quad \therefore \quad -y_1^{(3)} + y_7^{(3)} - \overset{0}{y_{13}^{(3)}} = c_3$$

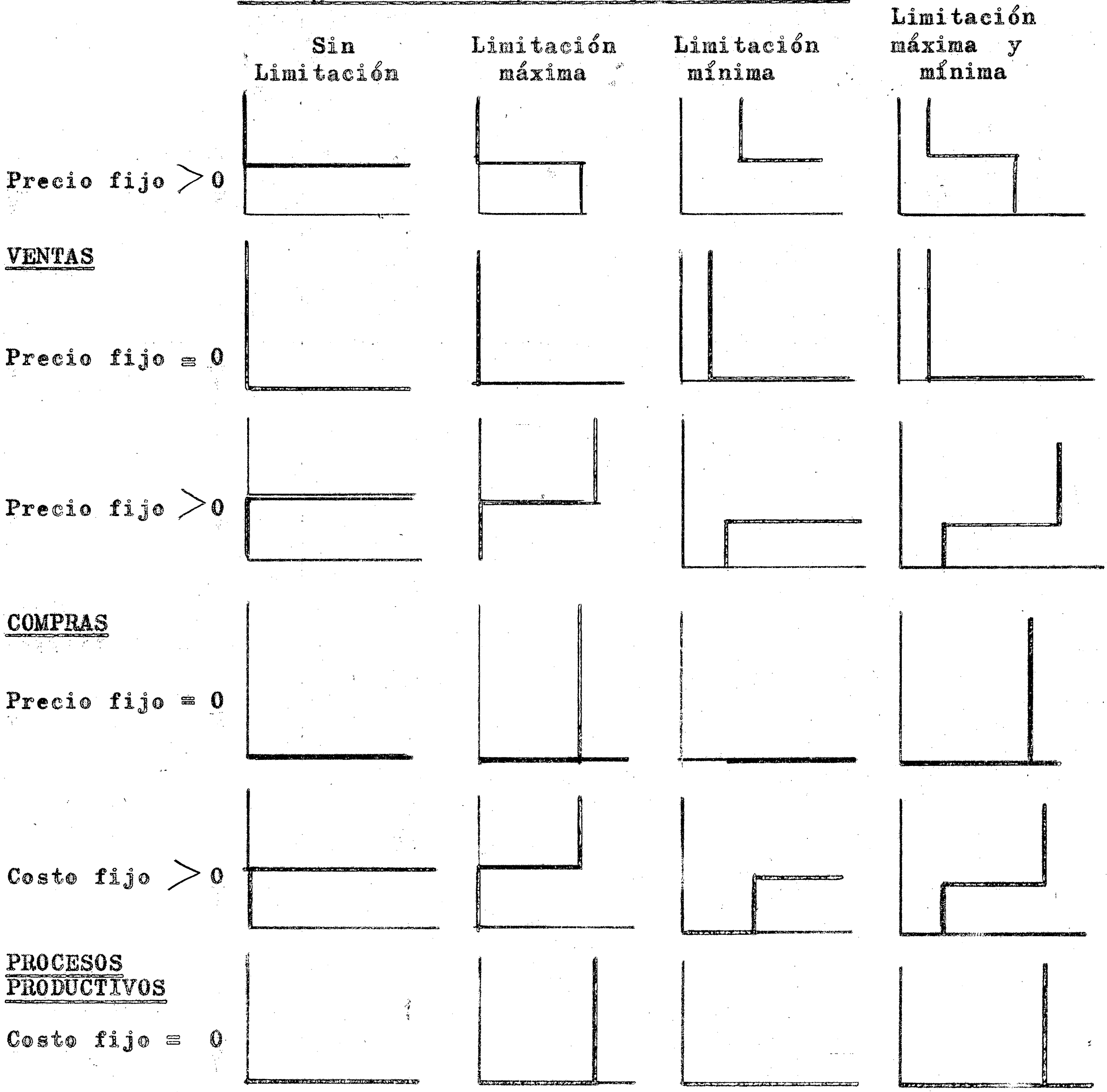
$$x_3^{(3)} > b_{13} \quad \text{(línea 13)} \quad \therefore \quad y_{13}^{(3)} = 0$$

$$x_3^{(3)} = b_7 \quad \text{(línea 7)} \quad \therefore \quad y_7^{(3)} \geqslant 0$$

$$y_1^{(3)} = c_3 + y_7^{(3)}$$

Ilustración 6

Configuraciones de precios y restricciones



Modelo 5

Escalas de producción

		x_1	x_2	$\leq$	
Rentas internas	y_5	1		b_5	limitaciones maximas
	y_6		1	b_6	
	y_7	a_{11}	a_{12}	b_7	
	y_8	a_{21}	a_{22}	b_8	
	y_9	k_{11}	k_{12}	b_9	
	y_{10}	k_{21}	k_{22}	b_{10}	
Subsidios internos	y_{11}	-1		$-b_{11}$	limitaciones mínimas
	y_{12}		-1	$-b_{12}$	
	y_{13}	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-b_{13}$	
	y_{14}	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$-b_{14}$	
	y_{15}	$-k_{11}$	$-k_{12}$	$-b_{15}$	
	y_{16}	$-k_{21}$	$-k_{22}$	$-b_{16}$	
	$\geq$	$-a_{11}c_3$	$-a_{12}c_3$		
		$-a_{21}c_4$	$-a_{22}c_4$		
		$+k_{11}c_5$	$+k_{12}c_5$		
		$+k_{11}c_6$	$+k_{12}c_6$		

Utilidades unitarias
a precios de mercado

Modelo 6

A.

$$
\text{precios de productos} \quad
\begin{array}{c|cc|l}
 & x_1 & x_2 & \leq \\
\hline
y_1 & (a_{11}-1) & a_{12} & -d_1 \\
y_2 & a_{21} & (a_{21}-1) & -d_2 \\
\hline
\geq & -\ell_1 & -\ell_2 &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\end{array}}\right\} \text{demandas finales}
$$

insumos de
mano de obra

B.

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \leq \\
\hline
y_3 & \ell_1 & \ell_2 & -1 & & & 0 \\
y_1 & (a_{11}-1) & a_{12} & & 1 & & 0 \\
y_2 & a_{21} & (a_{22}-1) & & & 1 & 0 \\
y_4 & & & & -1 & & -d_1 \\
y_5 & & & & & -1 & -d_2 \\
\hline
\geq & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

demandas finales

precio
fijo de
mano de
obra