Mario José Testa

CENTRO DE ESTUDIOS DEL DESARROLLO

C E N D E S

ALGEBRA LINEAL

Profesor E. Valenzuela

? pag 19

Caracas, Venezuela
1962

CAPITULO I

ALGEBRA LINEAL

1.1 Introducción. Bajo el título de álgebra lineal estudiaremos algunos capítulos importantes del Análisis Lineal. A saber, comenzaremos con una presentación y análisis de los sistemas de ecuaciones lineales; los espacios n-dimensionales y vectores n-dimensionales.

1.2 Sistema de ecuaciones. En los cursos de álgebra elemental se estudia la solución de sistemas de ecuaciones con dos o tres incógnitas. En particular, se presentan detalladamente tres métodos generales de resolución de ecuaciones: eliminación, sustitución y reducción de variables. Recordaremos en esta parte, mediante un ejemplo numérico, el método de reducción. La razón es que dicho método será empleado ventajosamente en la transformación de ecuaciones.

Por ejemplo: sea resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Multipliquemos la segunda ecuación por 2 y sumarla a la primera:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} 5x \quad &= 5 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Dividimos por 5 la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

En la resolución de este sistema se ha tratado de mantener estrictamente el orden de posiciones relativas de las variables. Observando detenidamente los diversos pasos que se han seguido, se desprende que en cada caso fueron los coeficientes de las variables los que se alteraron. Las variables no se alteraron. Las variables han servido en cada caso para identificar el coeficiente. Si ideamos un método en donde cada coeficiente conserve su posición en relación a la ecuación original, podemos simbólicamente sobre dichos coeficientes y en cierto modo abreviar un poco el engorroso proceso algebraico. Para aclarar la idea anteriormente dicha, repitamos todo el proceso anterior de transformaciones de la ecuación. La ecuación original es:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Escribamos solamente un cuadro con los parámetros numéricos de esta ecuación. Es decir, consideremos únicamente el siguiente cuadro ordenado de números:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dicho cuadro contiene toda la información necesaria de la ecuación; los puntos verticales, nos recordarían la ubicación de los signos de igualdad.

Los siguientes pasos fueron:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

y finalmente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad (1)$$

Nuevamente escribamos la solución del sistema, como anteriormente lo hiciéramos:

$$\begin{array}{ll} x_1 & = 1 \\ \quad x_2 & = 1 \end{array} \qquad (2)$$

Observando cuidadosamente (1) y (2) se desprende que no admite diferencia formal alguna ya que el cuadro de elementos (1), representa un sistema de ecuaciones explícitas en x_1 y x_2. A saber, (1) se puede escribir en la siguiente forma:

$$1.x_1 + 0.x_2 = 1$$

$$0.x_1 + 1.x_2 = 1$$

o bien más abreviadamente:

$$\begin{array}{ll} x_1 & = 1 \\ \quad x_2 & = 1 \end{array}$$

De todo esto se desprende que parece lógico pensar que exista un método general a seguir, tomando únicamente para operar el cuadro de los elementos de los coeficientes de la ecuación original. Se habrá llegado a la solución cuando se obtenga un cuadro de coeficientes con una diagonal de unos con los elementos restantes cero. A la derecha de la línea punteada, al final de la transformación, estarán los valores numéricos de las variables, que no necesariamente son nulos. En la etapa siguiente nos dedicaremos a estudiar procedimientos que nos permitan formar matemáticamente la diagonal de unos. Es decir, estudiaremos algún procedimiento algebraico que nos permita transformar una ecuación del tipo:

$$a_1\ x_1 + b_1\ x_2 = c_1$$

$$a_2\ x_1 + b_2\ x_2 = c_2$$

cuyo cuadro de parámetros es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \qquad (1)$$

en el cuadro siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \end{array}\right]$$

que representará la solución del sistema. Dichos cuadros de números ordenados, en que cada elemento tiene una posición definida, se designan con el nombre de matrices numéricas (ya que los elementos en este caso son números reales). Dada la importancia que tiene la ordenación de estos números en columnas o filas de números. Se pueden formar, a saber:

Columnas de (1): $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Y filas de (1): $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

reciben nombres determinados. Se designan con el nombre de vectores, filas y columnas a las ordenaciones de números que provienen respectivamente de filas y columnas de la matriz de elementos numéricos. Tanto en el caso de matrices o vectores el orden de los elementos es la característica principal, ya que no son sino ordenaciones verticales y horizontales de números; en cambio las matrices son ordenaciones bidimensionales de números, escritos en forma de rectángulos o cuadros. En algún caso la matriz (1) se designa como matriz de orden 2 filas por 3 columnas, o bien, matriz de orden 2 x 3. Sería impropio decir matriz de ~~orden 6~~ pues la notación 2 x 3, está indicando que la matriz está formada por 2 filas, 3 columnas. Conviene tener en cuenta, aun cuando no es obvio, que un vector no es otra cosa que una matriz con una columna o fila.

Notación y Símbolos:

Será conveniente definir ante nada algunos de los símbolos que utilizaremos posteriormente, como también algunos nombres frecuentes en el lenguaje algebraico.

Definición:

Llamaremos sistemas de ecuaciones a las expresiones algebraicas de primer grado en las variables

De la forma:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Definición: Un sistema lineal se dice que es homogéneo si todos los términos constantes que figuran en el segundo miembro son cero ($c_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$). Si los c_i son distintos de cero el sistema no es homogéneo.

Es preferible, utilizar otro tipo de notación para las variables y parámetros. Las diferentes variables se designaran mediante una sola variable, pero con diferentes subíndices, a saber: en vez de x, y, diremos x_1, x_2. Para los parámetros tendremos que utilizar sub-índices: uno que indique la fila y otro la columna en que se encuentra, a saber:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

En general: a_{ij} será un elemento genérico ubicado en la "i" - ésima fila y en la "j" - ésima columna. Ayudará a recordar cuál es cual si se memoriza la palabra F I C O. abreviación de la fila-columna.

Esta notación queda en general para cualquier número de ecuaciones, a saber:

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\ x_n = b_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\ x_n = b_1$$

$$a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}\ x_n = b_m$$

Este será un sistema de m ecuaciones con n variables. La matriz correspondiente de los coeficientes de las variables es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ---- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ---- & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ---- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz de los parámetros del sistema es una Matriz de orden m x n.

Existe otro tipo de notaciones: otra es la que se distingue con el nombre de "a" aumentado, en la cual se combinan sub-índices con super-índices, a saber: a^i_j .

Es correcto expresar las variables x_1 , x_2, ..., x_n simbólicamente por el vector X, a saber:

$$X = (x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots,\ x_n\ )$$

Ahora introducimos la notación: f_i (X) será una forma lineal del vector X, que no es otra cosa que la expresión abreviada del primer miembro de ecuación:

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\ x_n = f_1\ (X)$$

También podemos escribir libremente nuestro sistema en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 (X) &= b_1 \\ f_2 (X) &= b_2 \\ &\text{-----------} \\ f_m (X) &= b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

Definición:

Se denomina combinación lineal de las formas $f_1 (X)$, $f_2 (X)$ ..... $f_m (X)$ a la suma : $\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i (X)$,

en donde no todos los coeficientes c_i son iguales a cero.

Definición:

Se dice que $f_1 (X)$, $f_2 (X)$........$f_m (X)$ son linealmente dependientes si es posible encontrar números reales c_i, no todos iguales a cero, tales que, la combinación lineal: $\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i (X)$ sea idénticamente nula.

Por ejemplo: $f_1 (X) \equiv 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 ; f_2(X) \equiv 6x_1 - 3x_2 + 6x_3$

$$f_3(X) \equiv 15x_1 - 4x_2 + 16x_3$$

$$\therefore \quad 2f_1(X) + 4 f_2(X) - 2 f_3(X) \equiv 0$$

Condición de consistencia:

Toda dependencia lineal entre las ecuaciones del sistema debe persistir respectivamente para los valores del segundo miembro de las ecuaciones.

Es decir: sean c_1 , c_2, ..., c_n números reales entonces si:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \, f_i \, (X) = 0$$

debe ser:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \, b_i = 0$$

Esto es evidentemente con respecto al sistema de ecuaciones con (2).

Operaciones Elementales

Revisando cuidadosamente el tipo de operaciones algebraicas que se realizan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, (se destacan especialmente de libros importantes), se observa que el número de operaciones que se efectúan es limitado o que dichas operaciones son del tipo suma, producto, resta o división. Llamaremos operaciones elementales al conjunto de operaciones permisibles en las transformaciones de sistemas de ecuaciones en otros equivalentes. Se han estudiado en la parte de álgebra las operaciones que a continuación expondremos abreviadamente en forma de reglas operacionales. El objeto de repetir esto aquí es la de aplicar simultáneamente estas reglas a un sistema de ecuaciones lineales y observar el paralelismo que ocurre en una aplicación a la matriz de los coeficientes del sistema. A cada una de las operaciones elementales le asignaremos un símbolo operacional, que será de extraordinaria ayuda y simplificación al entrar a considerar la materia aisladamente.

En resumen distinguiremos las siguientes reglas operacionales, suponiendo dado en cada caso un sistema lineal de ecuaciones, S.

Regla I: Fi(k)

Se puede multiplicar una ecuación de (S) por un número real distinto de cero.

Supongamos que se tiene el siguiente sistema:

$$(S) \begin{cases} f_1 \, (X) = b_1 \\ f_2 \, (X) = b_2 \end{cases}$$

Esta conocida regla operacional dice que cualquiera ecuación del sistema que se multiplique por un número diferente de cero conduce a un sistema (S_1) equivalente con (S). Es decir, en símbolos: $(S) \backsim (S_1)$, o bien:

$$(S) \begin{cases} f_1 \ (X) = b_1 \\ \\ f_2 \ (X) = b_2 \end{cases}$$

es equivalente con el sistema:

$$(S_1) \begin{cases} f_1 \ (X) = b_1 \\ \\ kf_2 \ (X) = kb_2 \end{cases}$$

Para recordar lo que se entiende por sistemas equivalentes reproduciremos la definición de los "Apuntes para el curso de Matemáticas Básicas" del CIEF.

Definición:

Dos ecuaciones son equivalentes cuando un sistema de soluciones de la primera, es también un sistema de soluciones de la segunda.

Definición:

Sistemas de ecuaciones equivalentes son aquellos en que las soluciones de una son también soluciones de la otra.

Por ejemplo: son equivalentes los sistemas:

$$(S) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad (S_1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Si el ejemplo anterior lo escribiéramos en forma matricial, es natural pensar en la equivalencia de dichos cuadros. (A menos de tener que representar las radiografías del sistema de ecuaciones). Las matrices aumentadas de los sistemas (S) y (S_1) respectivamente son:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad y \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad (1)$$

Con el objeto de facilitar la notación, adoptaremos el símbolo F_i (j) para indicar el paso de una matriz aumentada a otra por medio de la regla 1. En este caso F_2 (2), estará realizando la operación de producto por 2 en la segunda ecuación del sistema. Es decir:

$$F_2(2) \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Nota:

Hemos adoptado la letra F_2 mayúscula para indicar que la operación es realizada sobre la Fila dos. En el paréntesis se pone el número real que multiplica la F_2. Ese número puede ser positivo o negativo.

Las notaciones al respecto no son universales. Algunos autores utilizan la $R_i(c)$ para representar una operación similar. La letra R es el símbolo de "row".

Llamando a las matrices de (1) A y B podemos escribir que A es equivalente con B, o bien, simbólicamente $A \backsim B$.

Si empleáramos la notación que define la operación elemental F, escribiríamos la siguiente igualdad:

$$F_2(2)\ A = B$$

Regla 2: $F_{ij}(X)$

Se puede sumar a cualquier ecuación de (S) otra multiplicada por un cierto número real diferente de cero.

Se destaca que en esta operación elemental también el sistema (S_1) resultante es equivalente con (S).

Es decir:

$$\begin{cases} f_1(X) = b_1 \\ f_2(X) = b_2 \end{cases}$$

es equivalente con:

$$\begin{cases} f_1(X) + k\ f_2(X) = b_1 + k\ b_2 \\ \qquad\qquad f_2(X) = b_2 \end{cases}$$

La notación que emplearemos para definir esta segunda operación elemental será: F_{ij} (X).

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Será equivalente con el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2(x_1 + x_2) &= 1 + 2 \ . \ 2 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Usando notación matricial, tendremos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

será equivalente con:

$$\begin{bmatrix} 3 + 2 & 2 + 2 & 1 + 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pero éste a su vez es igual a:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

llamamos a la matriz (1): A, y a la matriz de elementos en (2): B, escribiremos simbólicamente

$$F_{12}(2)\ A = B$$

o bien:

$$F_{12} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Regla 3</u> F_{ij}

Se pueden intercambiar dos ecuaciones del sistema (S)

Evidentemente dado el sistema (S):

$$(S) \begin{cases} f_1 \ (X) = b_1 \\ f_2 \ (X) = b_2 \\ f_3 \ (X) = b_3 \end{cases}$$

Intercambiar dos ecuaciones, tales como (1) y (2), conducirá a un sistema (S_1) equivalente con (S).

$$(S_1) \begin{cases} f_2 \ (X) = b_2 \\ f_1 \ (X) = b_1 \\ f_3 \ (X) = b_3 \end{cases}$$

por ejemplo: dado

$$(S) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

determinar

$$(S_1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Evidentemente (S) y (S_1) son equivalentes.

La notación que emplearemos para definir esta operación elemental será: F_{ij}. Indicará el intercambio de la fila i por la fila j, dejando sin alterar el resto de las ecuaciones del sistema. La matriz aumentada de los sistemas (S) y (S_1) del ejemplo son:

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

entonces simbólicamente se tendría:

$$S \backsim S_1 \quad \text{o bien} \quad S_1 = F_{12}S$$

<u>Regla 4</u>

Se puede agregar o suprimir del sistema (S) ecuaciones idénticamente nulas.

Se denomina ecuación idénticamente nula, una ecuación del tipo:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

Dado

$$(S)\begin{cases} f_1\ (X) = b_1 \\ f_2\ (X) = b_2 \end{cases}$$

Podemos obtener (S_1), agregando la ecuación nula: $0f_3(X) = 0 \, . \, b_3$

$$(S_1) \begin{cases} f_1 \ (X) = b_1 \\ f_2 \ (X) = b_2 \\ 0 \, . \, f_3 \ (X) = b_3 \, . \, 0 \end{cases}$$

Ambos sistemas son equivalentes. Esta operación no tendrá un símbolo original puesto que no se justifica.

Igualmente podemos restar o sumar una ecuación idénticamente nula a cualquiera ecuación del sistema. Dicho artificio es muy frecuente en Matemáticas y en particular en Programación Lineal.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + \ x_2 = 2 \\ \hline \end{array}$$

Podemos formar (S_1) sumando a la primera ecuación $0x_1 + 0x_2 = 0$

$$(S_1) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 0x_1 + 0x_2 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_1 + \ x_2 = 2 \end{cases}$$

En otros casos, se puede suprimir la ecuación idénticamente nula, a saber:

$$(S) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ \ x_1 + \ x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

Se deduce abreviadamente:

$$(S_1) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ \ x_1 + \ x_2 = 2 \end{cases}$$

Por razones que se verán más adelante (mantener el valor 3 x 3 en la matriz aumentada en el sistema (S), en la notación matricial de (S) no se suprime la fila de ceros, es decir:

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

se deja en la misma forma, aún cuando en la ecuación se suprima normalmente. En esta forma S es una matriz de 3 x 3 elementos. Si suprimiéramos la fila de ceros se encontraría una matriz:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

de 2 x 3 elementos.

En algún caso en que la fila de ceros no ocurre en la última fila, se prefiere intercambiar filas hasta darle la forma siguiente:

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

S es de órden $(m + r) \cdot n$ elementos, con r filas de ceros.

Los procedimientos antes presentados nos han permitido transformar sistemas de ecuaciones en otros equivalentes. Análogamente dichas reglas aplicadas a las matrices ampliadas nos permiten transformar dichas matrices en otras equivalentes.

Erratas.

pag 16.

Se llama longitud de una forma, el subindice del ultimo termino a_i diferente de cero, con respecto a la ordenacion natural de los a_i, es decir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Puesto que a_i indica el coeficiente de orden i, de acuerdo a la notación convenida diremos que si a_i es el ultimo coeficiente distinto de cero, entonces la longitud de f es i. Si $f=0$ la longitud es cero.

La aplicabilidad de todo esto está respaldado por el siguiente teorema que asegura la equivalencia de los sistemas aun cuando el número de operaciones elementales aplicadas, aunque grandes, sea en todo caso finito.

Teorema: La aplicación de un número finito de operaciones elementales sobre S, conduce a un sistema S_1 equivalente con S.

Sistema Escalonado

Para poder precisar lo que llamaremos sistema escalonado, es conveniente definir lo que se entiende por longitud y norma de una forma lineal. Sea por ejemplo: la siguiente forma lineal:

$$f(X) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

con respecto a la ordenación natural de los e_i

mal ! Se llama longitud de la forma, el número de términos diferentes de cero. Con la notación anterior, puesto que a_i indica el coeficiente de orden i, diremos que si a_i es el último coeficiente distinto de cero, entonces la longitud de f es i. Si $f \equiv 0$ la longitud es 0.

Si además el último coeficiente distinto de cero tiene valor 1 se dice que la forma está normalizada.

Por ejemplo:

$$f(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

los vectores
el vector:

(0; 0; 3; 0; 0)

$$(2;\ -1;\ 3;\ 0;\ 0)$$

Tienen longitud (3) y no están normalizados en cambio el vector (2 ; 1; 0) tiene longitud 2 y está normalizado.

Definición:

Un sistema lineal S habrá llegado a ser un sistema escalonado, si cumple con los siguientes requisitos:

1) Cada ecuación tenga longitud positiva y esté normalizada.

2) Sean $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ las longitudes de las ecuaciones, entonces

$$\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_n$$

3) $x_{\ell i}$ no aparece en ninguna otra ecuación a excepción de la i-ésima, $i = 1, 2, \dots, = n$.

Es decir, toda la mecánica antes descrita tiene por objeto transformar un sistema de ecuaciones lineales en uno del tipo:

$$S_e \left\{ \begin{array}{lr} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1\ell_1 -1} x_{\ell_1 -1} + x_{\ell_1} & = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots a_{2\ell_2 -1} x_{\ell_2 -1} + \quad + x_{\ell_2} & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{m\ell_m -1} x_{\ell_m -1} + \quad + x_{\ell m} & = b_m \end{array} \right.$$

<u>Teorema</u>:

Todo sistema lineal de ecuaciones S es equivalente a un sistema de la forma S_E en donde $\ell \leqslant \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_m \leqslant n$

<u>Solución general de S</u>:

El sistema S_E se puede resolver con respecto a cada una de las variables $x_{\ell 1}, x_{\ell 2} \dots x_{\ell m}$. Cada una de estas formas explícitas queda expresada como una combinación lineal de las restantes variables $n - m$.

En la práctica de la reducción de problemas siempre existe la pregunta de consistencia o nó del sistema, la cual se salva procediendo directamente en las siguientes etapas:

(1) reducir (S) al sistema (S_E)

(2) si no existen contradicciones en las diferentes etapas, entonces (S) es equivalente a (S_E); lo que muestra que también (S) es consistente.

Designaremos con la letra X al vector solución y escribiremos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definición:

Llamaremos solución trivial del sistema S la que tiene por solución el vector nulo:

$$\overline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema:

ver página siguiente

Supongamos que S es consistente y de rango r, entonces $r \leqslant n$:

nº de ec = nº de incogn.

1) Sea $r = n$, entonces el sistema S tiene solución única (si no es un sistema homogeneo ; $b_i = 0 \ \forall i$)

2) Sea $r < n$, entonces admite infinitas soluciones de S.

Existen algunas propiedades más de este sistema escalera con respecto al sistema original. Fundamentaremos eso en los siguientes teoremas.

Teorema:

Existe un único y determinado sistema S_E equivalente al sistema S.

Definición:

Llamaremos rango de un sistema lineal de ecuaciones, al máximo número de ecuaciones (o formas) linealmente independientes. El rango es cero si todas las formas son nulas: $f_i\ (X) = 0$

Teorema:

El rango es una invariante del sistema lineal de ecuaciones, cualesquiera que sean las operaciones elementales efectuadas.

Teorema:

El número de ecuaciones de S_E es igual al rango del sistema S.

Por conveniencia y que posteriormente se justificará, la solución de un sistema de ecuaciones estará dado por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^o \\ x_2 &= x_2^o \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^o \end{aligned} \qquad \text{o bien:} \qquad X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ \vdots \\ x_n^o \end{bmatrix}$$

Teorema:

Sea r el rango de un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas en n variables, entonces:

1) Sea r = n, S sólo admite la solución trivial

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Sea $r \lneq n$, existe una solución no trivial; en particular, un sistema lineal y homogéneo en que $m > n$ tiene una solución no trivial

Ejercicios

1. Escribir la matriz de los elementos de los siguientes sistemas:

1.1
$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 4x + 3y &= 45 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} 8x + 3y &= 25 \\ 5x + y &= 13 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} 11x - 36y &= 26 \\ 7x + 12y &= 34 \end{aligned}$$

1.4
$$\begin{aligned} 24x_1 + 20x_2 - 360 &= 0 \\ 36x_1 - 30x_2 - 180 &= 0 \end{aligned}$$

1.5
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 6x - 2y - z &= -14 \\ 3x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

1.6
$$\begin{aligned} x + z &= -8 \\ 2x + z &= 9 \\ 3y + 2x &= -3 \end{aligned}$$

2. Escribir el vector solución de cada uno de los sistemas anteriores.

3. Escribir los sistemas siguientes en forma escalonada:

$$\begin{aligned} 2x_1 - y_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2y_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

4. Indicar si los sistemas son linealmente dependientes o nó:

4.1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

4.2
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. Dado la matriz de los coeficientes de un cierto sistema lineal de ecuaciones:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones elementales:

$$F_1(2) \quad ; \quad F_{12}\,(-2) \quad ; \quad F_{13}\,(2) \quad ; \quad F_{13}$$

6. La matriz de los coeficientes del sistema 4.2 es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribir las operaciones elementales que representan cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Indicar si las filas de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes o independientes.

8. Demostrar que las formas lineales siguientes no son linealmente independientes:

$$f_1(X) = 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \; ; \; f_2(X) = -3x_1 + 8x_2 + 11x_3 - 7x_4 \; ;$$

$$f_3(X) = 18x_1 + 42x_2 + 79x_3 + 2x_4$$

9. Demostrar que los sistemas siguientes son equivalentes:

$$(S) \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{array} \qquad (S_1) \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ \frac{1}{77} x_1 - \frac{1}{55} x_2 + \frac{1}{35} x_3 = \frac{1}{385} \\ x_1 + x_2 - \frac{1}{2} x_3 = 1 \end{array}$$

$$(S_2) \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 21x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 17 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{array} \qquad (S_3) \quad \begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{array}$$

indicando que transformaciones aplicadas sobre (S) dan (S_1), (S_2), (S_3).

11. Determinar la longitud y normalidad de las siguientes formas:

$$f_1\ (X) = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4$$

$$f_2\ (X) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$f_3\ (X) = 0$$

EV/gev. 9.1.62.