Mario José Testa

CENTRO DE ESTUDIOS DEL DESARROLLO

(CENDES)

ALGEBRA LINEAL

Profesor: E. Valenzuela

Caracas-Venezuela
1962

CAPITULO III

MATRICES

3.1 Introducción:

En el capítulo I se presentó la necesidad de dar algún nombre a ciertas ordenaciones de números reales provenientes de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Dichos cuadros de números, que hemos llamado matrices, fueron sometidos a ciertas operaciones elementales, ya que provenían de las ecuaciones, y dichas operaciones eran perfectamente legítimas en los sistemas de ecuaciones. En esta etapa prescindiremos del origen de dichos números y sólo consideraremos un nuevo ente matemático que llamaremos matriz y estudiaremos detenidamente sus propiedades. Finalmente, cuando tengamos la unidad conceptual y un grupo de propiedades, entonces volveremos a ver su aplicabilidad en la resolución de ecuaciones.

Definición: Una matriz es una colección rectangular ordenada de números, escrita en la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Como este cuadro es un rectángulo bidimensional de elementos, es preciso observar la presencia de un doble sub-índice para representar un elemento cualesquiera a_{ij} de la matriz.

Convención:

El primer sub-índice "i" se refiere a la fila y el segundo sub-índice "j" a la columna. Así el elemento ubicado en la tercera fila y primera columna, se denota a_{31}. Como puede verse la matriz (1) posee m filas y n columnas, lo cual permite caracterizar perfectamente la forma de la matriz; es por eso que una matriz del tipo anterior se dice que es de orden m por n:(m, n). Notaremos que el orden de la matriz es: (número de filas) x (número de columnas) y no lo contrario.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ es una matriz de } 2 \times 2;$$

la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ es de orden } 3 \times 2 \text{ y no de } 2 \times 3$$

Emplearemos letras mayúsculas A, B, ... para designar una matriz. Corrientemente se emplearán diversos tipos de paréntesis para indicar el cuadro de elementos; teniéndose los paréntesis y corchetes como los más usados ( ) y [ ]. No se descartará tampoco la posibilidad de usar dos rayas verticales $\| \quad \|$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ esta matriz es de orden } 2 \times 4$$

o bien, escribiremos $A(2;\ 4)$

En general escribiremos una matriz de orden $m \times n$ en la forma:

$$A = A(m;\ n) = \{a_{ij}\} = [a_{ij}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los símbolos A y a_{ij} no indican explícitamente el orden de la matriz; concretamente no se sabe cual es el número de filas y de columnas que la integran. Dicha notación se justificará únicamente en los casos en que el orden sea conocido de antemano, o se indique aparte.

Los elementos de una matriz pueden ser de otra índole distinta de los aquí considerados, a saber, pueden ser fraccionarios, números complejos, propiedades, etc.

Una matriz de orden m x n conceptualmente puede considerarse constituída por n vectores-columnas, o bien, por m vectores-filas, cada uno de los cuales posee m y n componentes.

Adoptaremos la siguiente notación para indicar los vectores-columnas que forman la matriz $A(m, n) = \{ a_{ij} \}$:

$$a_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad y, \quad a_{i\cdot} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

En donde $a_{\cdot j}$ es el j-ésimo vector-columna, además $j= 1,2 \ldots n$. En igual forma a_{i} es el i-ésimo vector-fila en que $i = 1, 2 \ldots m$. O sea, que la matriz A puede escribirse en la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i\cdot} \\ \vdots \\ a_{m\cdot} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m \\ j = 1, 2, \ldots n \end{array} \right\} \quad \text{o bien:} \quad A = \begin{bmatrix} a_{\cdot 1} & a_{\cdot 2} \cdots & a_{\cdot j} & \cdots & a_{\cdot n} \end{bmatrix}$$

Existen diversos tipos de matrices que posteriormente explicaremos detalladamente. Esta caracterización es muy útil en la formación de productos.

3.2 <u>Operaciones con Matrices.</u> Se notará en esta parte una enorme <u>similitud con el capítulo</u> de operaciones entre vectores.

Dicha semejanza no es casual, sino que tanto los vectores como las matrices son todos casos particulares de un ente mucho más general conocido con el nombre de Tensor. Precisamente en la Física teórica el tensor tiene un nacimiento natural. Quién intente adentrar en la mecánica cuántica y teoría de la Relatividad, tendrá antes que nada estudiar detalladamente el Cálculo Tensorial.

Definición: Dos matrices A y B se dicen iguales, si, solamente los elementos homólogos son iguales.

Sea $A(m, n) = \{a_{ij}\}$ y $B(m, n) = \{b_{ij}\}$

entonces se tiene:

$a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$; y $j = 1, 2, \ldots n$.

La condición de igualdad se fundamenta en que no existirá a menos que ambas matrices sean del mismo orden.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

como: $a_{ij} = b_{ij}$ entonces $A = B$

es decir:

$a_{11} = 0$; $b_{11} = 0$

$a_{21} = 1$; $b_{21} = 1$

$a_{12} = 1$; $b_{12} = 1$

$a_{22} = 1$; $b_{22} = 1$

En cambio no podemos comparar por igualación las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Definición</u>: La suma de dos matrices $A(m, n)$ y $B(m, n)$ es otra matriz $C(m, n)$ en que cada elemento es igual a la suma de los elementos homólogos de las matrices sumadas, e.g.

$$A = \{a_{ij}\} \qquad B = \{b_{ij}\}$$

$$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 0+0 & 1+1 \\ 1-1 & 0-1 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que la suma de los vectores no es más que un caso particular de la suma de matrices . La suma de matrices de diferente orden no está definida.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$ no está definido y no es posible sumarlas.

<u>Teorema</u>: La suma matricial es conmutativa y asociativa i.e.,

$$\left.\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + \bar{0} &= A \\ A + (-A) &= \bar{0} \end{aligned}\right\}$$

Forman grupo abeliano respecto de la suma. El elemento de identidad es la matriz nula:

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } B + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A + B$$

<u>Definición</u>: El producto de una matriz $A(m, n) = \{a_{ij}\}$ por un escalar c, es otra matriz de la forma: $\{c.a_{ij}\}$.

Es decir, cada elemento de la matriz $A = \{a_{ij}\}$ está multiplicado respectivamente por el escalar c.

Ejemplo:

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} ; \quad c = 2$$

entonces:

$$cA = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad c = -1$$

$$cA = (-1)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición: La diferencia de dos matrices $A(m; n)$ y $B(m;n)$, se define en la forma siguiente:

$$A - B = A + (-1)B$$

Es decir, para restar dos matrices se restan los elementos homólogos de las matrices: $(a_{ij} - b_{ij})$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - 0 & 1 - 1 \\ 1 - 0 & 0 - 0 \\ -1 + 1 & 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Producto Vector-Matriz:

Estudiaremos un tipo de producto que no es más que una extensión del producto (producto interior) de dos vectores. Hemos mencionado que una matriz puede considerarse como un grupo de vectores-filas o vectores-columnas; de donde, se desprende que el producto vector-matriz no será más que una repetición de la ley o regla antes definida para el producto entre vectores.

Definición: Sean A(m; n) una matriz, x un vector-columna n-dimensional; el producto será otro vector-columna m-dimensional, de la forma:

$$A.x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A.x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 0.1 + 1.0 \\ 0.1 + 1.1 + 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 0 + 0 \\ 0 + 1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A.x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente podemos considerar el producto vector-fila por matriz.

Definición: Sea x un vector-fila m-dimensional y una matriz A(m; n), entonces el producto es otro vector-fila n-dimensional, de la forma:

$$x.A = (x_1\ x_2\ \dots\ x_m)\ .\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\, x_i \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\, x_i \ \dots \sum_{i=1}^{m} a_{in}\, x_i \right]$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x.A = \begin{bmatrix} 1.0 + 0.2 + 1.1 + 0.0 & 1.0 + 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{bmatrix}$$

$$x.A = \begin{bmatrix} 0 + 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$x.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4 <u>Productos de matrices</u>:

La multiplicación entre matrices ha sido definida en tal forma que las operaciones de transformación lineal pueden ser fácilmente expresadas. La definición de productos es simplemente una extensión de la operación del producto interior, entre vectores. Otro tipo de producto es el conocido con el nombre de producto Hadamard, producto de los elementos correspondientes de los dos factores, el que es muy poco utilizado.

<u>Definición</u>: Para multiplicar dos matrices, A.B, es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B, el producto es otra matriz C, que se forma con los elementos de A y B de acuerdo con la fórmula:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}\, b_{rj}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & + & by & + & cz \\ dx & + & ey & + & fz \end{bmatrix}$$

Naturalmente se observa que esta definición está en completo acuerdo con el producto interior de vectores. Gráficamente, el producto se indicará por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

O sea, podemos sintetizar que el elemento c_{ij} de la matriz producto se forma haciendo el producto del vector-fila $a_{i\cdot}$ por el vector-columna $b_{\cdot j}$

$$\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots a_{ir}} \circ \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ b_{rj} \end{matrix}} = \boxed{c_{ij}}$$

Para recordar la regla bastará recordar la palabra: FICO (fila por columna). Simbólicamente el producto puede plantearse en términos de los órdenes de las matrices factores; sea el problema de efectuar el producto de A(m; r) por la matriz B(r; m), el producto es otra matriz C(m; n) , i.e:

$$A(m;\ r)\ \circ\ B(\ r;n\ )\ =\ C(m;\ n)$$

A . B = C

Ejemplo: $\quad A(3;\ 2)\ \circ\ B(2;\ 5)\ =\ C(3;\ 5)$

Producto de matrices cuadradas: Sean A y B dos matrices cuadradas. Para efectuar el producto entre A y B es necesario que ambas sean del mismo orden. La matriz producto es también cuadrada y del mismo orden:

$$A(n; n) \quad ; B(n ; n)$$

$$A(n ; n) . B(n ; n) = C (n ; n)$$

luego:

$C(n; n)$ será la matriz producto

Gráficamente se verá lo siguiente : que la matriz producto tiene el número de filas del primer factor y el número de columnas del segundo:

$$C = (N^\circ \text{ de filas de } A;\ N^\circ \text{ de columnas de } B)$$

Conmutatividad del producto: No siempre es cierto que el producto matricial es conmutable i.e.:

$$A.B = B.A.$$

Incluso en ciertos casos, ni siquiera se puede efectuar el producto B.A, aún cuando A.B está perfectamente definido.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

En cambio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{?} \quad \text{no tiene sentido}$$

La matriz cuadrada en ciertos casos conduce a productos conmutables. Siempre será posible en este caso efectuar ambos productos, es decir:

$A.B \neq B.A$ Si las matrices no son conmutables

$A.B = B.A$ Si las matrices son conmutables.

Para distinguir estos diferentes tipos de producto con respecto a los factores, (ya que conducen a resultados diferentes) en general se dice que:

A.B ; A pre-multiplica a B
B.A ; B pre-multiplica a A

En algunos casos se habla de post-multiplicación i.e.

A.B ; B post-multiplica a A, esta expresión es poco usada.

Matrices permutables: Si dos matrices A y B poseen la propiedad conmutativa y además los productos son iguales se dice que son matrices conmutables. O sea,

$$A.B = B.A$$

entonces: A y B son matrices permutables o conmutables.

Producto matriz fila por matriz columna: Este tipo de producto fué perfectamente estudiado en el capítulo de producto de vectores. En esta parte se observa que esto no es más que un caso particular del producto entre matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \end{bmatrix}$$

simbólicamente el producto es:

$$A\,(1;3)\ .\ B\,(3;1) = C\,(1;1)$$

el producto es un escalar o elemento único.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

Producto matriz columna por matriz fila: Consideremos el siguiente producto:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{bmatrix}$$

La regla simbólica indicará:

$$A\,(3,1)\ .\ B\,(1,3) = C\,(3,3)$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Matriz cuadrada post-multiplicada por una matriz columna</u>: Sea el siguiente producto:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix}$$

Se usa en la resolución de sistemas de ecuaciones.

O sea:

$$A\,(3,\ 3)\ .\ B(3,\ 1) = C(3,\ 1)$$

Por ejemplo, en un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Se puede escribir en forma de producto matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

En general:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3.5 Principales tipos de Matrices: Dada la frecuencia con que ocurren ciertos tipos de matrices, es conveniente enumerarlas y destacar algunas de sus propiedades.

Definición: Una matriz de orden (1 ; n) es un conjunto de n cantidades ordenadas en una fila comúnmente llamada vector-fila o matriz-fila.

Ejemplos:

$$A(1;4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(1;n) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots b_n \end{bmatrix}$$

Definición: Una matriz de orden (m,1) es un conjunto de m cantidades ordenadas en una columna llamada vector-columna o matriz-columna.

Ejemplos:

$$A(3;1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B(m;1) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Definición: Una matriz de orden (n,n) en que sus elementos tienen la propiedad:

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

$$a_{ij} \neq 0 \qquad \text{para } i = j$$

se llama matriz diagonal:

Ejemplo:

$$D(3,3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Los elementos no nulos se encuentran en la diagonal principal. En general:

$$D(n,n) = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

designará una matriz diagonal n-dimensional. También es frecuente encontrar el símbolo: $D(d_1, d_2 , \ldots d_n)$ para representar una matriz diagonal, o bien, $\text{diag}(0,0, \ldots 0, d_1, d_2, \ldots , d_m)$

<u>Definición</u>: Una matriz-diagonal en que todos sus elementos en la diagonal principal son iguales a la unidad se llama matriz unitaria.

Esta matriz se representa por la letra I y un sub-índice para indicar el orden. La matriz unitaria es necesariamente cuadrada.

Ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Algunas veces I se representa como:

$$I = \| \delta_{ij} \| = [\delta_{ij}]$$

en que δ_{ij} es el elemento general de I_n. Se designa δ_{ij} con el nombre de Delta-kronecker, caracterizado por:

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esta matriz posee propiedades similares a las de la unidad numérica.

Teorema: Sea $A(m,n)$ una matriz cualquiera e I una matriz unitaria, entonces:

$$I_m A = A$$

$$A I_n = A$$

$$IA = AI = A \quad \text{si } m = n$$

Teorema: En general cualquier potencia de I_n es igual a I.

$$(I_n)^n = I$$

Entenderemos que $(I)^n$ es equivalente al producto:

$$(\ldots((I \cdot I) \; I) \ldots I) = (I)^n$$

Definición: Una matriz de orden (m,n) en que todos sus elementos son iguales a cero se llama matriz nula o cero. Se designa por $\bar{O}$.

Ejemplos:

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una ecuación matricial de la forma:

$$A B = \bar{O}$$

no necesariamente implica, alguna de las siguiente alternativas:

$$A = \bar{O} \quad ó \quad B = \bar{O} \quad ; \quad A = \bar{O} \quad y \quad B = \bar{O}$$

Probar esto mediante ejemplos.

$$
\begin{aligned}
A + \bar{O} &= A \\
A \oplus \underline{A} &= \underline{O} \quad \text{siempre que el producto esté definido} \\
\underline{A} \circ \bar{O} &= \underline{O} \\
\bar{O} \cdot A &= O
\end{aligned}
$$

$$A \cdot \bar{O} = \bar{O}.A \text{ siempre que } A(n,n)$$

Definición: La matriz transpuesta (símbolo A') de la matriz A es la matriz que se forma intercambiando filas y columnas de A. O bien, se emplea el símbolo A^T

Ejemplos:

1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} ; \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} ; \quad B' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

3.

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} ; \quad C' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{bmatrix}$$

Teorema: La operación de transposición tiene las siguientes propiedades:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Ejemplos:

1.
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}^T = \begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}^T = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

2.
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}^T = \begin{bmatrix}1 + 1 + 0\end{bmatrix}$$

$$= 2$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}^T = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 + 1 + 0\end{bmatrix}$$

$$= 2$$

3.
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 1 & 2\\3 & -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\right\}^T = \begin{bmatrix}1+0+4 & 3+0-4 & 4+0+4\\2+2+2 & 6+0-2 & 8+0-2\\3-2+1 & 9+0-1 & 12+0+1\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}5 & -1 & 8\\6 & 4 & 10\\2 & 8 & 13\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 \\ 8 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0-4 & 2-2-2 & 3-2-1 \\ 3-0-4 & 6-0-2 & 9-0-1 \\ 4-0-4 & 8-0-2 & 12-0-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 \\ 8 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

<u>Definición</u>: Se dice que una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta. Una matriz simétrica es necesariamente cuadrada y sus elementos son simétricos respecto de la diagonal principal.

Si $A = A^T$ entonces A es simétrica

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = A^T$$

A es simétrica pues $A^T = A$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} = B^T, \quad B \text{ es simétrica}$$

Definición: Una matriz antisimétrica se define por la igualdad, matricial:

$$A + A^T = 0$$

o por la relación equivalente:

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{si } i = j$$

$$a_{jj} = -a_{jj} \Rightarrow a_{jj} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \neq 0 \text{ si } i \neq j, \text{ y} \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i = j \end{array} \right\}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

luego:

$$A + A' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A \text{ es entonces antisimétrica}$$

Se observa que una matriz antisimétrica, es cuadrada y los elementos de la diagonal principal son iguales a cero.

En resumen, tendremos que:

$$A - A^T = O \quad \text{simétrica}$$

$$A + A^T = O \quad \text{antisimétrica}$$

<u>Corolario:</u> Cualquier matriz A puede escribirse en la siguiente forma:

$$A = A_s + A_a \qquad A_s = \text{matriz simétrica}$$

$$A_a = \text{matriz antisimétrica}$$

Demostración, sea:

$$A_s = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A'$$

y

$$A_a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2} A'$$

luego:

$$A_s + A_a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A' + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A' = A$$

<u>Matriz triangular:</u>

Definición: Una matriz es triangular si los elementos sobre (bajo) una diagonal son cero y los restantes elementos bajo (sobre) la misma diagonal no son todos cero.

Si los elementos sobre la diagonal son <u>no</u> nulos, se dice que la matriz es triangular superior, si los elementos inferiores son <u>no</u> nulos se llama matriz triangular inferior.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{triangular superior}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{triangular inferior}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.6 Partición de matrices:

Es conveniente para propósitos de cálculo, particionar matrices en términos de sub-matrices.

Definición: Particionar una matriz es una operación que consiste en dividir en sub-matrices la matriz dada.

Esta operación se puede realizar de muchas maneras, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

las siguientes particiones son perfectamente posibles:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] ; \quad \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] ; \quad \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

o bien, simbólicamente:

$$A= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

en que los bloques, celdas o sub-matrices A_{ij} son:

$$A_{11}= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A_{12}= \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}$$

Es muy interesante estudiar las propiedades algebraicas de las matrices particionadas.

Suma de bloques: Supongamos sean dadas dos matrices A y B; se busca la suma de ellas en términos de una partición dada. Es necesario para sumar dos matrices, que ambas sean del mismo orden, además para sumar bloques, se debe tener también las sub-matrices de la partición que deben ser respectivamente del mismo orden. O sea:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

luego:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

Siempre que: orden de A = orden de B

y orden de A_{ij} = orden de B_{ij}

sólo y solamente en este caso podemos hablar de la suma de A + B por medio de bloques $A_{ij} + B_{ij}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se podrá sumar por sub-matrices si la partición es similar

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hdashline 2 & 2 & 1 \end{array}\right] ; \qquad B = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] ; \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

entonces C = A + B en que:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hdashline 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

pero no podríamos escribir la partición así:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y escribir que:

$$C = A + B$$

$$C_{11} = A_{11} + B_{11} \; ; \text{ etc.}$$

<u>Producto de Matrices Particionadas:</u> Si el producto A.B, está definido y ambas matrices A y B son particionadas de una cierta manera — siempre que el orden de partición de las columnas de A sea similar con el de las filas de B — entonces el producto A.B puede calcularse empleando la conocida regla FICO.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}$$

A.B tiene sentido, pero además el número de columnas de las sub-matrices A_{11}, A_{12}, A_{13}, debe ser igual al número de filas que tienen las sub-matrices B_{11}, B_{21}, B_{31}, respectiva - mente.

Por ejemplo:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (2) & & & (3) & & (1) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} ; \quad \begin{array}{c} (2) \\ \\ \\ (3) \\ \\ (1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = B$$

Se puede observar en el ejemplo anterior que el número de columnas de los bloques de A son: (2), (3) y (1). Igualmente, los números encerrados entre paréntesis adyacentes a la matriz B, nos indican el número de filas que tienen las respectivas sub-matrices. En consecuencia, dado que coinciden exactamente, el producto será legítimo.

Supongamos que esta condición se verifique para las matrices A y B; el producto por medio de bloques dados por la siguiente partición:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

será similar al producto entre matrices antes definido:

$$A.B = \begin{bmatrix} A_{11}\ B_{11} + A_{12}\ B_{21} & A_{11}\ B_{12} + A_{12}\ B_{22} \\ A_{21}\ B_{11} + A_{22}\ B_{21} & A_{21}\ B_{12} + A_{22}\ B_{22} \end{bmatrix}$$

<u>Definición</u>: Una matriz B, se dice inversa de una matriz A, si se tienen las siguientes igualdades:

$$A.B = I \quad y \quad B.A = I$$

Emplearemos para designar la matriz inversa de A el símbolo A^{-1} . Este símbolo es análogo al del álgebra de los números reales:

$$a.b = b.a = 1 \quad ; \text{ a, b números reales.}$$

$$b = \frac{1}{a}$$

pues

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

y el símbolo para $b = \frac{1}{a}$, se recordará que es:

$$b = a^{-1}$$

Si dos matrices A y B tienen matrices inversas y son del mismo orden, entonces A.B tiene inversa dada por:

$$(A\ .\ B)^{-1}$$

<u>Teorema</u>: La inversa de un producto de dos matrices es igual al producto de las matrices inversas permutadas.

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}\ .\ A^{-1}$$

Demostración: Por definición de la inversa de una matriz, supongamos que:

$$(A.B)\ .(B^{-1}\ .\ A^{-1}) = I$$

pues:

$$A(B.B^{-1})\ A^{-1} = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

Igualmente:

$$(B^{-1}\ .\ A^{-1})\ .\ (A.B) = I$$

entonces:

$$(A\ .\ B)^{-1} = B^{-1}\ .\ A^{-1}$$

<u>Teorema</u>: Si A tiene inversa, también tendrá A^T, y será igual a $(A^{-1})^T$:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Demostración: Como por definición:

$$A^T\ (A^{-1})^T = (A^{-1}\ .\ A)^T = I$$

y $$(A^{-1})^T\ .A^T = (A\ .\ A^{-1})^T = (I)^T = I$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Ejercicio:

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

encontrar:

$$\left\{ (B^{-1} \circ A^{-1})^{T} \right\}^{-1} = \left\{ (B^{-1} . A^{-1})^{-1} \right\}^{T} = \{ A . B \}^{T}$$

Ejercicios:

1.1 Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular: A + B ; A - B ; B + A ; B - A

1.2 Calcular

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Dado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular $\quad A \cdot B \; ; \qquad B \cdot A$

3. Calcular:

$$I - A$$

en que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Desarrollar:

$$Z = A \cdot Y - B \cdot Y$$

en que:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \overline{0} \; ; \; A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

5.1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

5.2 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

5.3 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5.4 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.5 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

5.6 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.7 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot I$; $I \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$. Explique el significado de I, en ambos casos.

6. Encontrar las componentes del vector x:

6.1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6.2 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

7.2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7.3 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

7.4 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ m \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

8. Escribir en forma de producto de matrices los siguientes sistemas, (sin resolver, ni calcular las variables):

8.1 $$2x + 3y = 0$$

8.2 $$\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array}$$

8.3 $$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}$$

9. Ejecutar los siguientes ejercicios:

9.1 $$(2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - (5) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9.2 $$\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Puede el producto de dos matrices diferentes de cero ser iguales a cero?. Encontrar AB.

11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ calcular}$$

$$A^2 \ ; \ A^3 \ ; \ \ldots \ ; \ A^n$$

generalice el producto n-ésimo para una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad A^n = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}^n$$

12. Sea

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 1 \end{bmatrix}$$

encontrar A^n.

3.7 Equivalencia de Matrices

En el capítulo I se estudió una serie de operaciones elementales que transformaban sistemas de ecuaciones en sistemas equivalentes. En parte, se adelantó, algunas de las propiedades de los sistemas se aplicaron a cuadros de números o matrices. Dedicaremos esta parte, a estudiar el efecto de estas operaciones elementales sobre las filas en una matriz y veremos hasta donde se conserva la equivalencia de estas matrices. Daremos el nombre de transformaciones elementales de una matriz a cualesquiera de las siguientes operaciones:

T_{ij} = la transformación que intercambia el vector A_i por A_j

$T_i(c)$= la transformación que reemplaza el vector A_i por cA_i

$T_{ij}(c)$ = la transformación que reemplaza el vector A_i por $A_i + cA_j$

Se puede observar que una transformación queda anulada por una del mismo tipo, pero en sentido inverso. Es decir, dada una matriz:

Definición: Se designa con el nombre de matriz elemental la matriz que se obtiene de I por la aplicación de un tipo particular de transformación elemental T. ; T (I)

Ejemplos: Sea $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces T_{23} ; $T_2(c)$ y $T_{23}(k)$ transforman I_3 en las siguientes matrices, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$T_{23} \; I_3 \quad ; \; T_2(c) I_3 \quad ; \; T_{2\,3}(k) I_3$$

Todo operación elemental T sobre una matriz A, puede considerarse como el producto entre las matrices: E . A.

Así por ejemplo:

$$T \; A = T(I \; A) = (T \; I) \; A$$

$$T \; A = E \; A$$

Convendremos en identificar por E las matrices elementales, igualmente

$T_{i\,j}$, $T_{ij}(c)$ T_i (c) sean también matrices

provenientes de la aplicación de T_{ij}, $T_{ij}(c)$, $T_i(c)$ sobre I respectivamente.

$$T_{ij} \; I = \left[T_{ij}\right]$$

$$T_i \; (c) \; I = \left[T_i \; (c)\right]$$

$$T_{ij}(c) \; I = \left[T_{ij} \; (c)\right]$$

Anteriormente hemos definido el concepto de matriz inversa A^{-1} de A. Es aquella que satisface las siguientes propiedades:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Es evidente que las matrices elementales anteriores, aplicadas sobre sus inversas, poseerán la propiedades anteriores:

$$\left[T_{ij}\right]\left[T_{ji}\right] = I \qquad \left[T_{ij}\right]^{-1} = \left[T_{ji}\right]$$

$$\left[T_i(c)\right]\left[T_i(\tfrac{1}{c})\right] = I \qquad \left[T_i(c)\right]^{-1} = \left[T_i(\tfrac{1}{c})\right]$$

$$\left[T_{ij}(c)\right]\left[T_{ij}(-c)\right] = I \qquad \left[T_{ij}(c)\right]^{-1} = \left[T_{ij}(-c)\right]$$

Luego:

<u>Teorema</u>: Cada matriz elemental tiene una inversa que es a su vez una matriz elemental del mismo tipo.

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de matrices es lo que se entiende por rango.

<u>Definición</u>: Llamaremos rango de una matriz E el número de filas diferentes de cero.

Ejemplo:

1.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ 0 & & & d_4 \end{bmatrix} \quad ; \; r\ (D) = 4$$

2.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad ; \; \text{diag.}\ (d_1,\ d_2,\ d_3,\ 0,\ 0)$$

$$r(D) = 3$$

El símbolo que utilizaremos es: $r(E)$ será un número natural positivo. Poco antes hemos dicho que la relación de equivalencia, divide el conjunto de todas las matrices de orden m x n en sub-conjuntos, cada uno de los cuales, posee una matriz E única.

Bastará probar que el rango es una invariante ante un número finito de transformaciones elementales. Efectivamente:

<u>Teorema</u>: El rango es una invariante de las matrices bajo transformaciones elementales T.

De esto resulta que los últimos teoremas nos suministran un método práctico para encontrar el rango de una matriz cualesquiera A. Bastará buscar la matriz E que le es equivalente:

$$A \backsim E$$

luego contar el número de filas diferentes de cero.

<u>Teorema</u>: Sea $A \backsim E$, entonces $r(A) = r(E)$.

Definición: Una matriz A de orden n x n se dice no singular, siempre que $r(A) = n$. En caso contrario es singular: $r(A) \neq n$.

<u>Teorema</u>: Las siguientes proposiciones respecto de $A(m; n)$ son equivalentes entre sí:

(1) A es no-singular
(2) A es igual a un producto de matrices elementales.
(3) A tiene una inversa.

Demostración: Para demostrar esto hacemos el siguiente ciclo de implicaciones:

$$(1) \Longrightarrow (2)$$

$$(2) \Longrightarrow (3)$$

$$(3) \Longrightarrow (1)$$

El teorema anterior permite confeccionar una regla práctica para encontrar la matriz inversa de una matriz A no singular.

<u>Regla</u>: Para encontrar la matriz A^{-1} de la matriz no singular A, se aplican sobre I las mismas transformaciones y en el mismo orden que redujeron A en I.

Ejemplo:

$$E_k\ E_{k-1}\ \ldots\ E_2\ E_1\ A = I$$

$$(E_1^{-1}\ E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}\ E_k^{-1})\ (E_k\ E_{k-1}\ldots\ E_2\ E_1)\ A = (E_1^{-1}\ E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}\ E_k^{-1})I$$

$$(E_1^{-1}\ E_2^{-1}\ \ldots E_{k-1}^{-1})\ I\ \ (E_{k-1}\ldots\ E_r\ E_1)\ A = (E_1^{-1}\ E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1})\ E_k^{-1}\ I$$

....

$$(E_1^{-1}\ E_2^{-2})\ I\ (E_2E_1)\ A = (E_1^{-1}\ E_2^{-1})\ (E_3^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}\ I)$$

luego: $$A = E_1^{-1}\ E_2^{-1}\ldots\ E_{k-1}^{-1}\ E_k^{-1}\ I$$

$$A^{-1} = (E_k\ E_{k-1}\ldots E_2\ E_1)\ I$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3/2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

pues:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$