mario josé testa

CENTRO DE ESTUDIOS DEL DESARROLLO

C E N D E S

ALGEBRA LINEAL

Profesor Eduardo Valenzuela

Caracas, Venezuela

1962

CAPITULO II

ESPACIOS VECTORIALES

2.1 Introducción

La noción vector es muy usada en las ramas Matemáticas y en las Ciencias Físicas. La utilización del vector difiere un poco y depende primordialmente del campo en que se usa. La creación del vector resulta un hecho material, si es que se contempla alguno de los tantos ejemplos que nos brindan en la física, la mecánica. Basta observar el fenómeno de la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo, para comprender que dicho ente "fuerza"requiere más de una cantidad o número para su descripción; ya que en efecto dependerá de la magnitud,del sentido y de la dirección de la fuerza. Simbólicamente se representan por una letra con una flecha de sombrero: $\vec{X}$.

Analíticamente, un vector en el plano, se representará por un par ordenado de números reales, e. g: x_1, x_2 . También en este caso puede apreciarse que la magnitud y dirección del vector están caracterizados por la distancia del punto al origen y la pendiente con respecto al eje horizontal, respectivamente. En el caso de la fuerza, se recordará que "el efecto de la fuerza no depende del punto de aplicación, siempre que se mantenga la dirección", las fuerzas son del tipo de vectores deslizantes. Idénticamente un vector puede ubicarse en cualquier punto del espacio; pero es conveniente usar el origen de coordenadas como punto de aplicación.

Esta noción, se puede extender fácilmente al espacio de tres dimensiones, o bien, al caso general de n-dimensiones. En cada caso el vector se representará por números reales ordenados, a saber: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cada uno de los números reales que figura reciben el nombre de componentes del vector. De la física y mecánica también hemos aprendido a operar con dichos entes: sumar, restar y multiplicar un vector por un escalar, etc. todas estas operaciones tienen una equivalencia analítica que estudiaremos posteriormente.

En el siguiente estudio presentaremos un ente puramente matemático y general, sumamente útil, que podrá aplicarse a cualquier disciplina, siempre que la idealización corresponda a la noción y caracterización matemática que daremos.

En el capítulo I, hemos destacado que en el estudio de las ecuaciones nos han aparecido ordenaciones de números reales tanto en filas, columnas o en cuadros, que juegan un importantísimo papel en la resolución de dichos sistemas. Adelantándonos a la definición de los entes, los llamaremos respectivamente vectores-filas, vectores-columnas y matrices. El importante papel que desempeñan justifica generalmente el de considerarlos como entes matemáticos que requieren un análisis ulterior y sistemático. En esta forma iniciaremos el estudio de los vectores simplemente como algo nuevo, dando a cada paso la generalización que permita absorber cualquier caso particular. Con la generalización perderemos la claridad geométrica de la representación en el plano, o en el espacio ordinario, pero ganaremos en abstracción matemática y ejercicio lógico e imaginativo; en lugar de pretender una caracterización geométrica de vectores n-dimensionales. La siguiente definición y los axiomas respectivos nos crean los espacios vectoriales. Luego las ordenaciones de números reales en filas o columnas nos creará un ejemplo de espacio vectorial específico, el espacio euclídeo o espacio vectorial en el campo de los número reales.

<u>Definición</u>: Un espacio vectorial E es un conjunto de elementos x, y, z, ... llamados vectores, a los que se asignan dos leyes de composición, la suma y el producto escalar

La suma es una composición binaria, la simbolizaremos por el signo más: +. A todo par x, y, de vectores de E le corresponde en E un vector x + y, llamados su suma, fundamentado en los siguientes axiomas:

A_1: $x + y = y + x$

A_2: $x + (y + z) = (x + y) + z$

A_3: $x + O = x$

A_4: $x + (-x) = O$

<u>Nota</u>: Los axiomas A_3 y A_4 admiten la existencia de un vector O y (-x) llamados respectivamente origen y vector opuesto. Decimos que los vectores en E forman un grupo abeliano respecto de la suma, con elemento identidad o, el inverso de x es menos x.

El producto es una operación simétrica entre un escalar (número real o complejo) y un vector fundamentado en los siguientes axiomas:

$$A_5: \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$A_6: \quad (a + b)\,x = ax + bx$$

$$A_7: \quad a(bx) = (ab)\,x$$

$$A_8: \quad 1x = x$$

Dichos axiomas no son necesaria y legalmente independientes, sino simplemente una caracterización apropiada.

¿Qué tiene que ver esto con nuestros vectores filas o columnas?. Esta pregunta es perfectamente lógica. Resulta que el sistema anterior definido en el espacio vectorial E es consistente en si mismo y es completamente general. En cambio los vectores filas y columnas son vectores euclídeos n-dimensionales en el campo real. Veremos y estudiaremos un ejemplo o caso particular de espacio vectorial, E_3, que es el definido por tres número reales (triples) en filas o columnas, que verificarán los axiomas antes enumerados. En el lenguaje técnico se mencionarán como espacios euclídeos n-dimensionales (E_n) al conjunto de vectores n-dimensionales de componentes reales. Naturalmente estos vectores satisfacen los axiomas anteriores.

<u>Definición</u>: Un vector n-dimensional x es una sucesión de números escritos en una fila (-- $x_1, x_2, \ldots, x_n$) o en una columna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Cada x_i recibe el nombre de componente del vector. Se denominan respectivamente vector-fila y vector-columna.

Por ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$; etc.

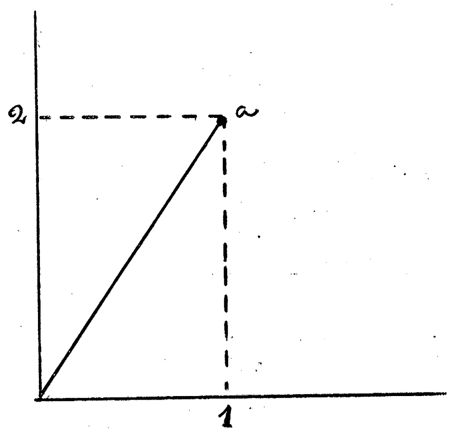
en que los componentes del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ son respectivamente: 1; 3; 4; 2.

El origen de este nombre reside en la capacidad de representar en un sistema cartesiano un vector de dos componentes como es el caso de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, por un punto. En que las componentes son respectivamente la abscisa y la ordenada del punto. Es decir:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>ordenada</u> o

segunda componente



<u>abscisa o</u>

primera
componente

En general, podemos hablar de un vector de n-componentes y escribirlo simbólicamente por:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

dicho vector tendría una representación geométrica en un espacio euclídeo n-dimensional E_n. Naturalmente que, geométricamente es posible representar sólo hasta el vector de tres componentes:

Si $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se tendrían que emplear tres ejes coordenados para representar geométricamente en un espacio-euclídeo tri-dimensional al vector anterior.

Un vector-fila es una colección ordenada de números escritos en una fila. Por ejemplo: (1;2) ; (0; 1; 2) ; etc.

Igualmente, un vector-fila n-dimensional será un vector de la forma:

$$a = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$$

Nota: (1) Cuando un vector-fila tiene n componentes se acostumbra separar los elementos por puntos y comas, si son elementos literales pueden suprimirse, si es que no existe confusión alguna.

(2) Al decir "números reales ordenados" se pretende distinguir los vectores de componentes 1 y 2, escritos por ejemplo en la forma: $x = (1, 2)$ será diferente de $y = (2; 1)$. Análoga - mente en un vector n-dimensional $x = (x_1, x_2 .. x_n)$ los sub-índices no solamente indicarán las diferentes componentes del vector, sino que también la posición de la componente respectiva.

Adoptaremos para este conjunto de números reales ordenados o vectores dos leyes de composición, definidos por las siguientes relaciones:

1) Sean $x = (x_1 , x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ entonces

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

2) Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y si a es un número real cualquiera; entonces:

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots , ax_n)$$

Veremos que estas dos leyes de composición satisfacen los axiomas $A_1 \rightarrow A_8$ y por ende el conjunto E_n, con las dos leyes, constituye un espacio vectorial en el campo de los números reales.

Ejemplo: Dado los vectores:

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \dots y_n)$$
$$z = (z_1, z_2, \dots z_n)$$

y a, b números reales cualesquiera

entonces; A_1: $x + y = y + x$

pues $x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n-y_n)$

y $y + x = (y_1+x_1, y_2+x_2, \dots, y_n+x_n)$

pero ambos miembros son iguales, pues la suma

$$x_i + y_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

es conmutativa por ser ambos números reales.

A_2: $x + (y + z) = (x + y) + z$

como: $x + (y + z) = (x_1, x_2, \dots, x_n)+(y_1+z_1 \dots y_n+z_n)$

$$= (x_1 + \overline{y_1 + z_1}, \dots, x_n + \overline{y_n + z_n})$$

pero por el axioma de asociatividad de la suma podemos esribir:

$$= (\overline{x_1 + y_1} + z_1, \dots, \overline{x_n + y_n} + z_n)$$

pero esto es igual a:

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots z_n)$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n)$$

Por ejemplo el axioma

$$A_7: \quad a\,(bx) = (ab)\,x$$

$$a\left[b\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)\right]$$

$$a\,(bx_1,\ bx_2,\ \ldots\ ,\ bx_n)$$

$$(abx_1,\ abx_2,\ \ldots\ ,\ abx_n)$$

en base a la conmutatividad del producto, escribiremos:

$$(bax_1,\ bax_2,\ \ldots\ ,\ bax_n)$$

$$\text{o} \qquad b(ax_1,\ ax_2,\ \ldots\ ,\ ax_n)$$

finalmente:

$$b\left[a(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)\right]$$

Los restantes axiomas puede verificarlos el lector interesado.

2.2. Operaciones Algebráicas con Vectores.

Después de haber creado los entes matemáticos que constituirán los elementos de nuestro sistema, será preciso analizar las operaciones algebraicas que podemos efectuar, con el objeto de que el sistema modelo matemático pueda servir y ser aplicado con soltura.

Definición: Dos vectores n-dimensionales x, y, se dicen iguales si y solamente si, todas las componentes correspondientes son iguales, i. e. $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$x = y$$

siempre que: $x_1 = y_1$; $x_2 = y_2$

<u>Definición</u>: La suma de los vectores n-dimensionales x, y, es otro vector n-dimensional de componentes $x_i + y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ a + b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$a + b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$a + b$: no está definida

O sea, para sumar los vectores-filas o columnas se suman respectivamente las componentes homólogas. Se puede observar que la suma está definida siempre que los factores:

(1) sean de la misma dimensión

(2) sean de la misma forma

En general tendremos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}$$

Como viéramos anteriormente, estas leyes de composición satisfacen los axiomas de la conmutatividad y asociatividad.

Teorema: La suma de vectores n-dimensionales x, y, satisfacen los axiomas A_1, A_2:

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Definición</u>: Sea a un vector cualquiera, designaremos por -a al vector negativo de a, y escribiremos: $-a = (-1)\, a$.

Ejemplo 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;; \quad -x = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;; \quad -x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: $x = \begin{bmatrix} x_1 x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ entonces:

$$-x = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & \ldots & -x_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;; \quad -x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$$

entonces:

$$x + (-x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - (-x_1) \\ x_2 - (-x_2 \\ \vdots \\ x_n - (-x_n) \end{bmatrix}$$

$$x - x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - x = \overline{0}$$

Definición: La resta de dos vectores (x, y) n-dimensionales, es otro vector n-dimensional de componentes iguales a:

$$x_i - y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x - y = x + (-1)y$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & - & y_1 \\ x_2 & - & y_2 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ x_n & & y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: $a = (1 \quad 2 \quad 4)$; $b = (-1 \quad 3 \quad 2)$

$$a - b = (1 \quad 2 \quad 4) - (-1 \quad 3 \quad 2)$$

$$= (1 \quad 2 \quad 4) + (1 \quad -3 \quad -2)$$

$$= (2 \quad -1 \quad 2)$$

Definición: Un vector nulo n-dimensional, escrito $\overline{0}$, está definido como:

$$\overline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \overline{0} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$$

Cuando no cabe confusión se usará el 0 como notación abreviada para un vector nulo.

<u>Teorema:</u> El vector nulo satisface el axioma A_3

Ejemplo :

$$a + \overline{0} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{bmatrix}$$

$$a + \overline{0} = a$$

Ejemplo 2:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \overline{0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \overline{0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = x$$

<u>Definición</u>: El producto de un escalar a por un vector n-dimensional x es otro vector n-dimensional de componentes:

$ax_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo:

$$a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{bmatrix} \qquad \text{y}$$

$$a \cdot \left(x_1 \; x_2 \right) = \left(ax_1 \; ax_2 \right)$$

El producto escalar-vector es el producto de un número real a por un vector fila o columna en que cada componente queda multiplicado por el escalar.

Por ejemplo: $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

en general:

$$a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ax_n \end{bmatrix}$$

<u>Teorema</u>: El producto de un escalar por un vector obedece a los axiomas A_5, A_6

Ejemplo 1:

$$a \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$(a + b) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Representación Geométrica de las Operaciones con vectores bidimensionales</u>

De la representación gráfica de un vector bidimensional se desprende: "A todo vector bidimensional le corresponde un punto en el plano cartesiano y recíprocamente, a todo punto

que es igualmente una combinación lineal de este conjunto. Evidentemente, las ecuaciones a) y b) prueban el teorema de que

$\sum_{1}^{r} a^i\, x_i$ forman un espacio vectorial E.

Esta idea de expresar un vector por medio de combinaciones lineales de otros, será la idea central que nos preocupará estudiar. Además nos interesa abordar el problema de cuantos vectores son necesarios como mínimo para escribir o representar dicho vector. Así, en el plano se necesitan dos vectores básicos o unitarios, que en geometría vectorial se designan por las letras i, j. De acuerdo a nuestra notación, estos vectores en términos de componentes cartesianos se expresarían por :

$$i = (1, 0) \qquad j = (0, 1)$$

Cualquier vector: $x = (x^1, x^2)$ se expresaría como:

$$x = x^1 i + x^2 j \quad \text{o bien}$$

$$x = x^1 (1, 0) + x^2 (0, 1)$$

En el espacio tridimensional son necesarios tres vectores unitarios: i, j, k. Cualquier vector x se expresará por:

$$x = x^1 i + x^2 j + x^3 k$$

a) que la suma de las combinaciones lineales de los vectores están en E.

b) que para cualquier combinación lineal de $x_1 \ldots$, x_r, el producto cx pertenece a E.

a)

Sea: $x = \sum_{i=1}^{r} a^i x_i$; $y = \sum_{i=1}^{r} b^i x_i$

luego:

$$x - y = \sum_{1}^{r} a^i x_i - \sum_{1}^{r} b^i x_i =$$

$$= \sum_{1}^{r} (a^i x_i - b^i x_i) =$$

$$= \sum_{1}^{r} (a^i - b^i)\, x_i$$

pero esto es una combinación lineal de este conjunto.

b)

Sea:

$$x = \sum_{i=1}^{r} a^i x_i \quad y \quad c = \text{real}$$

entonces:

$$x = c \sum_{1}^{r} a^i\, x_i$$

$$x = \sum_{1}^{r} c\, (a^i\, x_i) = \sum_{1}^{r} (ca^i)\, x_i$$

2.4 Combinación lineal de vectores

Las operaciones definidas entre vectores y escalares permiten construir lo que se llama una combinación lineal, que será de tremenda importancia en lo que sigue:

Definición: Una combinación lineal de m vectores n-dimensionales $x_1, x_2, \ldots, x_m$ es un vector de la forma:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m$$

en donde los c_i son números reales cualesquiera.

Ejemplo:

sean x_1, x_2, x_3 definidos por

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}; \quad x_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}; \quad c_1 = 1; \ c_2 = 3; \ c_3 = 5$$

entonces, la combinación lineal correspondiente es:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

dicha combinación representa otro vector, que llamaremos x, que está dado por:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & + & 0 & + & 5 \\ 2 & + & 3 & + & 15 \\ 3 & + & 6 & + & 10 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Teorema: El conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto finito de vectores: $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de E_n forman un espacio vectorial E.

Demostración: la demostración se basará en probar dos cosas:

7. Sumar y restar los siguientes vectores, si la suma no es realizable indique por qué:

$$\begin{bmatrix}1\\4\\6\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}-6\\4\\-3\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}-17\\8\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}4 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

8. Multiplicar los vectores indicados por los escalares siguientes: 3; -4/5

$$\begin{bmatrix}4\\2\\-3\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-3 & 11 & 29\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}-3 & 4 & 17\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1\\-100\\4\end{bmatrix}$$

9. Efectuar el producto escalar indicado, indique si no es realizable.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 6 & 7\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1\\2\\4\\-1\\-1\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -6 & -6\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-5\\-4\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\4\\0\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\\-1\\6\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}1\\4\\10\\11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\4\\6\\7\end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 2\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix}$$

10. Demostrar con un ejemplo que $axy = (ax)\cdot y = a(xy)$; x, y vectores; a escalar

11. Demostrar con un ejemplo que:

$x\ (y + z) = xy + xz$; que condiciones deben cumplir x, y, z?

A: dos manzanas, 1 chocolate, 2 caramelos
B: tres caramelos, 5 manzanas, 2 naranjas
C: un pastel, 2 manzanas, 12 naranjas

2.1 Represente por medio de un vector fila las diferentes clases de artículos comprados.

2.2 Escriba las compras efectuadas por A, B, C como un vector fila, de la misma dimensión de 2.1.

2.3 Dado el vector precios:

$$p = \begin{bmatrix} 100 \text{ - cada manzana} \\ 50 \text{ - cada chocolate} \\ 10 \text{ - cada caramelo} \\ 50 \text{ - cada naranja} \\ 250 \text{ - cada pastel} \end{bmatrix}$$

Calcular las cuentas individuales de A, B, y C empleando la notación y producto vectorial.

2.4 Calcule de diferentes maneras la compra total de los hermanos en el almacen.

3. Demuestre mediante un ejemplo que la multiplicación vectorial satisface las siguientes propiedades:

$$x\,(a\,y) = a(x\,.\,y)$$

$$x\,(y+z) = xy + xz$$

en donde a es un número real, x, y, z vectores. Defina además las formas y dimensiones de los vectores.

4. Sea $x = (x_1 \; x_2)$ y $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si $x\,a = x_1$ y $x\,b = a_2$, calcular los componentes del vector x.

5. Representar geométricamente en el plano los vectores siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 & 11 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -11 & -11 \end{bmatrix}$$

6. Representar en el espacio tridimensional:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 12 & -10 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\0\\9\end{bmatrix}=(-18+0+36)=+18$$

Ejemplo 2:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\-3\end{bmatrix}=(-6+4+3)=1$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}=$$

$$=(3+2+4)+(-9+2-1)=(9-8)=1$$

Durante esta primera etapa podríamos justificar la notación vectorial argumentando así:

(1) tiene las ventajas que una colección de números se pueden representar por un sólo símbolo matemático a, b, c, ... , x, y, z,

(2) dicha colección puede tratarse como cantidad única.

(3) permite establecer relaciones complicadas en forma simple.

<u>Ejercicios</u>:

1. Dados los siguientes vectores:

$a = (1, 0, -2)$ $\qquad$ $x = (1, 2, 3)$

$b = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $y = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

1.1 $a \cdot b + x \cdot y$ $\qquad$ 1.2 $(2x - 3a) \cdot b$

1.3 $(2x-3a) \cdot (2b-y)$ $\qquad$ 1.4 $(a + x)(b - y)$

2. Supongamos que tres hermanos van a comprar a un almacén diversos alimentos, a saber:

Convengamos en que el producto de un vector-fila por un vector columna esté dado por la suma de los productos de las componentes homólogas.

<u>Definición</u>: El producto escalar de dos vectores x, y n-dimensionales, (x vector fila; y vector columna) escrito abreviadamente x . y, está definido por el número real igual a la suma de los productos de las componentes homólogas de los vectores x . y.

$$x \cdot y = (x_1 x_2 \ldots x_n) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

por ejemplo:

dado $a = (0 \quad 1)$; $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$a \cdot b = (0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 3$$

Debe destacarse que en este producto escribimos primero el vector-fila y luego el vector-columna, pues es así como hemos definido este tipo de producto escalar. La multiplicación de vectores filas columnas entre sí, no está definida.

Además se observa que el producto es un elemento numérico o vector de una componente. (es un escalar)

<u>Teorema</u>: Dado los vectores x, y, z, y el escalar a, el producto escalar posee las siguientes propiedades:

$$a\,(x \cdot y) = (ax) \cdot y = x \cdot (ay)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Ejemplo 1:

$$3\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 \\ 0 \\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 6 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 \\ 0 \\ 3\end{bmatrix} = (-18 + 0 + 36) = +18$$

pio al alumno. Ciertamente cabe preguntarse siendo las propiedades las mismas, porque han de crearse dos notaciones o formas diferentes. Entre las razones que existen están las que se vieron al estudiar los sistemas de ecuaciones lineales, en donde aparecieron colecciones de números (coeficientes) ordenados en filas o columnas que tenían importancia en la solución del sistema. Para diferenciarlas es que se creó estos dos tipos. También en cierto tipo de cálculo es conveniente dicha notación.

Ejemplo:

Supongamos que una fábrica produce tres productos diferentes. De A produce 10 unidades, de B produce 20 unidades, de C produce 50 unidades. El costo por unidad A es 100; de B es 200 y de C es 50. Se observa aquí que existen dos entidades diferentes, a saber producciones de los productos A, B, C y los costos en $ por unidad de estos productos. Podemos en esta forma utilizar los vectores para representar ambos datos sin confusión. El vector fila a = (10 ; 20 ; 50) representará las producciones de A,B, C y el vector columna.

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} \text{ representará los costos.}$$

$$a = (10\text{ A};\ 20\text{B}\ ;\ 50\text{C})$$

$$b = \begin{bmatrix} 100 \text{ pesos / A} \\ 200 \text{ pesos / B} \\ 50 \text{ pesos / C} \end{bmatrix}$$

La pregunta lógica será ¿cuál es el costo de producción de estos tres artículos?

Realmente lo que interesa es multiplicar el <u>vector-producción</u> por el <u>vector-costos</u> para obtener el <u>costo de producción</u>, desde <u>luego dicho</u> costo es un escalar o número que indicará cierta cantidad de pesos. Vectorialmente entonces tendríamos que representar el producto por: a . b

$$\text{o bien, } a \cdot b = (10\ ;\ 20\ ;\ 50) \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

pero por otra parte se desprende que el costo estará dado por la suma:

$$\text{Costo} = 10 \cdot 100 + 20 \times 200 + 50 \times 50$$
$$= 1000 + 4000 + 2500$$
$$\text{Costo} = \$\ 7500$$

Ejercicios:

1. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

calcular:

1.1 $a + 2b + 3c$

1.2 $2(a + b) - 3(b + c)$

1.3 $\frac{1}{3}(a + b + c)$

2. $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.1 $\frac{1}{2}u$ $\qquad -v \qquad 3u - w$

2.2 $(u + v) + w = u + (v + w)$

3. Cuando sea posible efectúe las operaciones, en caso contrario de razones.

3.1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

3.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

3.3 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1 \; ; \; 1) =$

3.4 $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

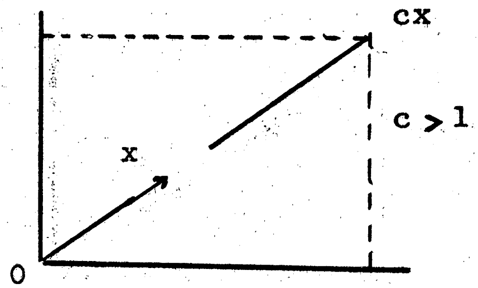
3.5 Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ encontrar $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.3 Producto de dos vectores

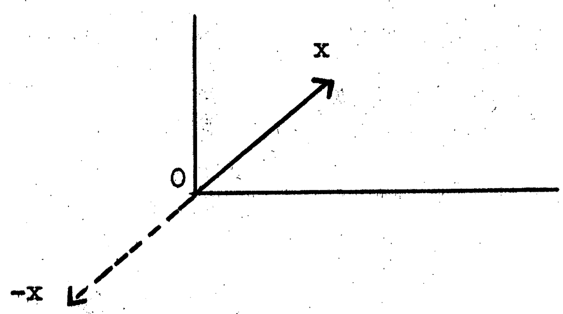
Sin duda la introducción de diferentes tipos de vectores, a saber, filas y columnas podrá extrañar en princiel vector suma es el vector $\overrightarrow{OS}$; parte en O y termina en S. Relación evidente, si se contemplan los rectángulos componentes en ella. "Dos vectores geométricos se suman empleando la regla del paralelogramo".

Interpretación del producto de un vector por un número real.

Basta observar la figura para comprender que dicha operación es equivalente a estirar o contraer el vector dado (según sea $c > 1$ o $c < 1$)

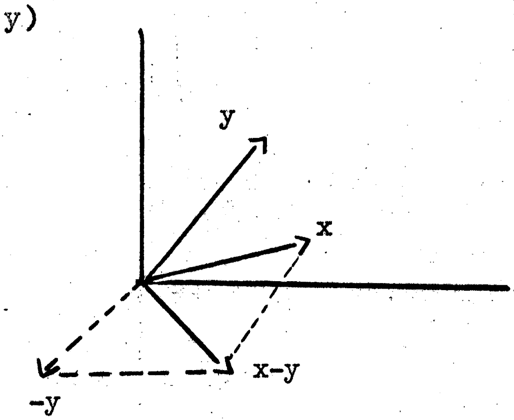


Vector opuesto



Vector resta $x - y$

$$x - y = x + (-y)$$



El vector geométrico se designa por $\overrightarrow{OP}$ y lo caracterizan:

Longitud = L

Sentido = OP

Dirección = ángulo θ

Por el extremo P podemos bajar perpendiculares y encontrar los valores x_1, x_2. Dicho par define un vector bidimensional. Entre ambos existe las relaciones evidentes:

$$\begin{cases} L^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \dfrac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

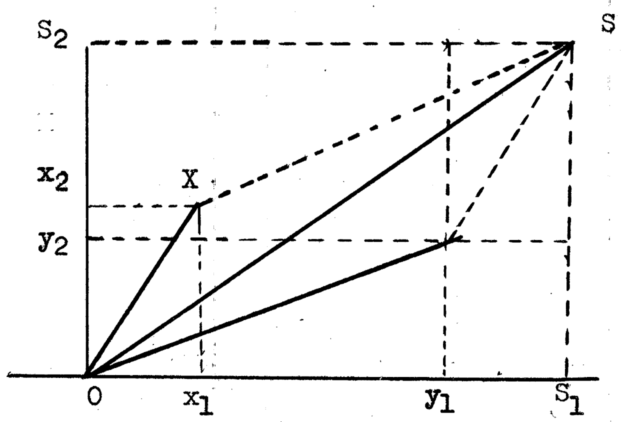
Interpretación geométrica de la suma.

Sean dados dos vectores: x, y bidimensionales. Encontrar gráficamente el vector suma x + y.

Sean $x = (x_1 , x_2)$

$y = (y_1 , y_2)$

entonces: $x + y = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$ por definición

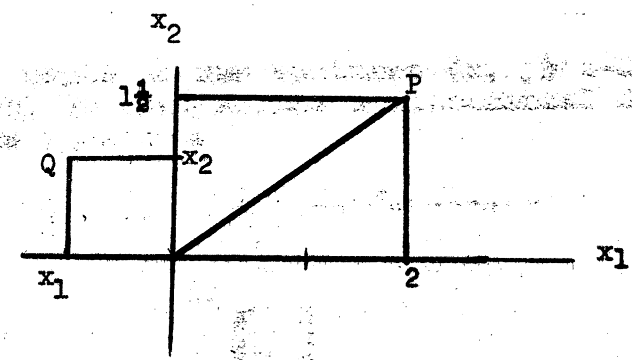


$$\overrightarrow{OS}_1 = x_1 + y_1 \ ; \quad \overrightarrow{OS}_2 = x_2 + y_2$$

$$\overrightarrow{OS} = x + y$$

del plano le corresponde un vector bidimensional".

Así por ejemplo:



Para representar geométricamente el vector $x = (x_1 ; x_2)$ de componentes

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 1.5$$

representamos cada uno de los componentes sobre los ejes perpendiculares x_1-x_2, luego por los puntos encontrados 2 y 1.5 trazamos las paralelas de los ejes, obtenemos un punto P (ver figura).

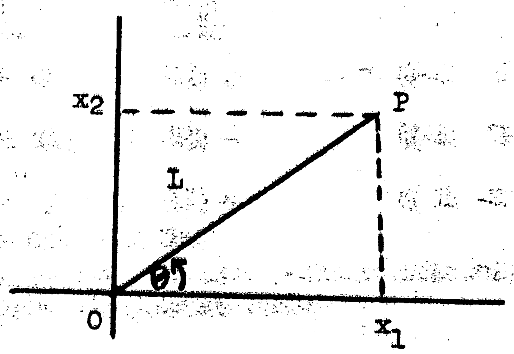
Recíprocamente si desde Q (ver figura) bajamos $\perp$s a ambos ejes, ellos determinarán sobre el primero en una magnitud x_1 y sobre el segundo una magnitud x_2, que será preciso medir (ver figura).

Puede anotarse que dicha correspondencia es biunívoca entre vector y punto.

Vector Geométrico

Otra posibilidad de representación es mediante el concepto de vector geométrico, se define por tres elementos: longitud, dirección y sentido. Estos tres elementos definen en el plano un punto y recíprocamente:

Ejemplo:



Los vectores i, j, k, en general, recibirán el nombre de <u>vectores unitarios normalizados ortogonales</u> y se designarán por e_1, e_2, e_3.

<u>Definición:</u> Un conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_s \in E$, despliega o genera E, si E es el subespacio determinado por las combinaciones lineales de los x_i

<u>Definición alternativa</u>: Un conjunto de vectores $x_1, x_2 \ldots, x_s \in E$, despliega o genera E, si cualquier vector de E puede expresarse como combinación lineal de los vectores x_i

Interesará posteriormente investigar cuántos vectores como mínimo pueden generar un espacio E_n. O en general, cuál es el menor número de vectores que generan o despliegan un espacio vectorial E_n.

<u>Definición</u>: Un conjunto de vectores x_i, $i = 1,2,\ldots n$ de un espacio E, son linealmente independientes, si únicamente los números reales c^i que satisfacen la ecuación.

$$\sum_1^n c^i x_i = 0$$

son: $c^1 = c^2 = \ldots c^n = 0$

En caso de que no se cumpla esta relación de números reales $c^i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ entonces, se dice que los vectores son linealmente dependientes

<u>Ejemplos</u>:

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes

(2) $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes

(3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes

Cuando existe un conjunto infinito de vectores independientes linealmente, bastará, si es posible encontrar un número finito de vectores linealmente independientes.

(1) Casos independientes: los vectores e_1, e_2, e_3 son linealmente independientes

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pues para cualquier x

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

implica:

$$x^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

O sea:

$$\begin{cases} x^1 .1 + x^2 .0 + x^3 .0 = 0 \\ x^1 .0 + x^2 .1 + x^3 .0 = 0 \\ x^1 .0 + x^2 .0 + x^3 .1 = 0 \end{cases}$$

que son las ecuaciones desarrolladas con respecto a las componentes de los vectores e_i. Para encontrar los valores $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$ la satisface, luego los vectores son linealmente independientes.

Teorema: El conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ es linealmente dependiente, si ~~solo~~ y sólo si, alguno de los vectores es una combinación lineal de los restantes.

Demostración:

a) Supongamos que x_n ~~no~~ se pueda~~n~~ expresar como combinación lineal de los otros:

$$x_n = \sum_{1}^{n-1} c^i x_i$$

o sea: $(+1)\ x_n - \sum_{1}^{n-1} c^i x_i = 0$ en que $c^n = 1 \neq 0$

Luego los vectores son linealmente dependientes

b) Supongamos que: $\sum_{1}^{n} c^i x_i = 0$, en donde al menos uno con $c_j \neq 0$, sin perder generalidad escribimos:

$$c^n x_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-c^i)\ x_i$$

$$x_n = \sum_{1}^{n-1} \frac{-c^i}{c^n}\ x_i \qquad \text{con } c^n \neq 0$$

luego: x_n es una combinación lineal de los restantes.

Ejemplo:

Los vectores $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$; $a_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

son linealmente dependientes, pues cualquiera es una combinación lineal de los otros dos.

Se podrá probar enseguida, que un conjunto cualesquiera de vectores contiene al menos un sub-conjunto linealmente independiente del vector que despliega al espacio que los contiene. Así, en el ejemplo anterior, el conjunto de los tres vectores contiene un sub-conjunto de dos de ellos que genera el espacio en que los tres se encuentran. Cualquiera de ellos se puede expresar como combinación de los dos. O sea,

$$a_1 = -\frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{en que: } c^1 = -\frac{3}{2}\ ;\ c^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = -\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad c^1 = -\frac{2}{3}\ ;\ c^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad c^1 = 2\ ;\ c^2 = 3$$

<u>Definición</u>: Se llama dimensión de un espacio vectorial E: $d(E)$, al máximo número de vectores linealmente independientes contenidos en E.

En otras palabras, supongamos que existen n vectores linealmente independientes, pero ningún conjunto de $n + 1$ vectores independientes, n es el máximo; entonces n se llamará dimensión de E. Si no existiera un n, diremos que E tiene dimensión infinita. Supondremos que en el curso, todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

<u>Lemma</u>:

(S) es un sistema de m ecuaciones homogéneas con n incógnitas:

(a) Sea $m = n$ no existen infinitas soluciones, sólo ~~incluso~~ la trivial

(b) Sea $m < n$ existe una solución no trivial

<u>Ejemplo</u>:

$$x_1 c_1^1 + x_2 c_2^1 + x_3 c_3^1 = 0$$

$$x_1 c_1^2 + x_2 c_2^2 + x_3 c_3^2 = 0$$

<u>Definición</u>: Un conjunto de vectores $x_1, \ldots, x_n \in E$ que:

a) es linealmente independiente y

b) que genera E,

<u>se llamará una base de E.</u>

Según esto, una base de E no es un conjunto único; existirán un número infinito de bases diferentes, pero si, todos tendrán en cambio el mismo número de vectores.

<u>Teorema</u>: Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una base E, entonces $n = d(E)$

<u>Teorema</u> Sea $d(E)=n$ y si $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ genera E, entonces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es <u>una</u> base de E.

Teorema: El conjunto e_1, e_2, ... e_n de vectores n-dimensionales:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; \ldots \; ; \; e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base de E_n

Demostración: Para demostrar que son una base es necesario probar dos cosas:

(a) que son linealmente independientes y

(b) que generan E_n

(a) son ellos linealmente independientes, pues:

$$\sum_1^n c^i e_i = 0 \quad \text{implica } c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

desarrollado en las componentes :

$$\begin{cases} c^1.1 + c^2.0 + \ldots + c^n.0 = 0 \\ c^1.0 + c^2.1 + \ldots + c^n.0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c^1.0 + c^2.0 + \ldots + c^n.1 = 0 \end{cases}$$

$m = n$, según Lemma tenemos:

$c^i = 0; i = 1,2,\ldots,n$

(b) cualquier vector x de E_n puede expresarse como combinación lineal de los e_i:

$$x = \sum_1^n x_i e_i \quad \text{q.e.d.}$$

Ejemplo: e_1, e_2, e_3 forman una base de E_3

a) $c^1 e_1 + c^2 e_2 + c^3 e_3 = 0$

implica que $c^1 = c^2 = c^3 = 0$

b) cualquier vector $x = (x^1, x^2, x^3)$ puede expresarse como combinación lineal de e_1, e_2, e_3: $x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$

Puede observarse que cualquier vector es una base de E_1; dos vectores cualesquiera no coincidentes, forma una base E_2; que tres vectores no coplanares forman una base de E_3; etc.

<u>Teorema</u>: Cualquier conjunto linealmente independiente de vectores $x_1, \ldots, x_m \subset E_n$ es parte de una base: $y_1, y_2 \ldots, y_m, y_m + 1, \ldots, y_n$

A estos vectores linealmente independientes que forman parte de una base, se definen como sub-base de E_n. Bajo este supuesto es posible completar esta sub-base en $(n - m)$ vectores linealmente independientes, hasta formar una base de E_n

<u>Demostración</u>: Consideremos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ si $x_1, \ldots, x_m, y_1$ son linealmente dependientes, se excluye y_1, formando así el conjunto S_1.

Proseguimos en igual forma, tomando y_2, para formar S_2, etc. Al final S_n es un conjunto linealmente independiente y entonces $y_1, \ldots, y_n$, que es una base, o bien pertenece a S_n, o bien, el conjunto $y_1 \ldots y_n$ puede expresarse como combinación lineal de S_n.

<u>Teorema</u>: Cualquier vector x de E_n puede expresarse como una combinación lineal única de vectores de alguna base dada.

<u>Demostración</u>: Sea $y_1 \ldots, y_n$ una base. Como genera E_n dado $x \in E_n$, entonces $\exists\; x_1^i$ tales que:

$$x_1 = \sum_1^n x_1^i \, y_i$$

Supongamos que otro vector x_2^i :

$$x_2 = \sum_1^n x_2^i \, y_i \quad \text{pero } x_1 = x_2$$

$$\sum_1^n (x_1^i - x_2^i)\, y_i = 0$$

como los y_i son linealmente independientes, entonces

$$x_1^i - x_2^i = 0$$

<u>Ejemplo</u>: Como $y_1 \ldots, y_n$ son una base, entonces:

a) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$

implica $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

b) $x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n$

implica equivalentemente:

$$a_1 \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_1^n \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_2^n \end{bmatrix} + \ldots + a_n \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Este es un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones en n-variables. En general existirá al menos una solución diferente de la trivial.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = x^1 B_1 + x^2 B_2 + \ldots + x^n B_m \; B_n\,?$$

En algunos casos conviene estudiar la forma de expresar un vector a en términos de m vectores dados B_i:

n

O sea:

$$a = \sum_{1}^{m} x^i B_i$$

en donde los elementos x^i para $i = 1, \ldots, m$ serán desconocidos y será preciso calcularlos. En términos de los componentes de los vectores tendremos un sistema de ecuaciones que será preciso resolver; en términos de x^r. Así vemos:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = x^1 B_1 + x^2 B_2 + \ldots x^n B_m$$

en que llamamos:

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1^n \end{bmatrix} ; \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_2^n \end{bmatrix} ; \ldots ; B_m = \begin{bmatrix} b_m^1 \\ b_m^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m^n \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = x^1 \cdot \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1^n \end{bmatrix} + x^2 \cdot \begin{bmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_2^n \end{bmatrix} + \ldots + x^m \cdot \begin{bmatrix} b_m^1 \\ b_m^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m^n \end{bmatrix}$$

y desarrollando, obtenemos el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$a_1 = x^1 b_1^1 + x^2 b_2^1 + \ldots + x^m b_m^1$$

$$a_2 = x^1 b_2^2 + x^2 b_2^2 + \ldots + x^m b_m^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = x^1 b_1^n + x^2 b_2^n + \ldots + x^m b_m^n$$

Resolver este sistema implica recordar las propiedades de los sistemas de ecuaciones no homogéneas (ver I-1.4). Siendo los B_i una base, entonces sabemos que existe una solución única.

<u>Ejemplo</u>: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $a = 1.\ e_1 + 2.e_2 + 3.\ e_3$

si queremos expresar a en términos de cuatro vectores, e_1, e_2, e_3, y, tridimensionales, existirán infinitas soluciones.

$$a = e_1 + e_2 + e_3 + y$$

$$a = e_1 + \dots +$$

$$a = e_1 + \dots +$$

....

La comprensión de las propiedades de las bases es muy importante y es frecuente el problema de cambiar de base, o bien, dado una base, cambiar un vector de la base por otro, pero sí interesa que la nueva combinación lineal siga siendo de otra base.

<u>Teorema</u>: Dado un conjunto n-dimensional de vectores bases $x_1, \dots, x_m$ y cualquier otro vector $y_1 \neq 0$

o $y_1 = \sum_1^m y_1^i x_i$

entonces podrá y_1 reemplazar cualquier x_i para el cual $y_1^i \neq 0$, y el nuevo conjunto de m vectores persiste como una base.

<u>Demostración</u>:

Como $x_1, x_2, \dots x_m$ es una base $\sum_1^m c^i x_i = 0$

implica $c^i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$

Sin perder generalidad, podemos suponer en $\sum_1^m y_1^i x_i$ que y_1^m es diferente de 0. El nuevo conjunto $x_1, x_2, \dots x_{m-1}, y_1$ probaremos que forma también una base: supongamos lo contrario, es decir, que son linealmente dependientes lo que implica que en:

$$\sum_1^{m-1} a^i x_i + a^m y_1 = 0$$

$a^m \neq 0$ pues por hipótesis $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ son linealmente independientes. Sustituyendo obtenemos:

$$\sum_1^{m-1} a^i x_i + a^m \left(\sum_1^m y_1^i \; x_i \right) = 0$$

$$\sum_1^{m-1} \left(a^i + a^m y_1^i \right) x_i + a^m y_1^m x_m = 0$$

sea:

$$c^i = a^i + a^m y_1^i \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$c^m = a^m y_1^m \;; \qquad \text{como } a^m \neq 0 \text{ y } y_1^m \neq 0$$

entonces: $c^m \neq 0$

Luego:

$$\sum_{i=1}^m c^i x_i = 0 \qquad c^m \neq 0$$

contradice el supuesto de dependencia lineal. Lo que implica que sean $x_1, x_2, \ldots, x_m$ linealmente independientes.

Además, cualquier vector x podrá representarse como una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}, y_1$. De la base $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$$Z = \sum_1^m c^i x_i$$

$$Z = \sum_1^{m-1} c^i x_i + c^m x_m$$

como: $$y_1 = \sum_1^m y_1^i x_i \; ; \quad \text{ya que } y_1^m \neq 0$$

$$x_m = -\sum_1^{m-1} \frac{y_1^i}{y_1^m} x_i + \frac{1}{y_1^m} y_1$$

luego, volviendo a Z :

$$Z = \sum_{1}^{m-1} c^i x_i + c^m \left[\frac{1}{y_1^m} y_1 - \sum_{1}^{m-1} \frac{y_1^i}{y_1^m} x^i \right]$$

$$Z = \sum_{1}^{m-1} \left[c^i - \frac{c^m}{y_1^m} y_1^i \right] x_i + \frac{c^m}{y_1^m} y_1$$

Luego el conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_1$ forma una nueva base.

Ejemplos:

1. Demostrar que los vectores: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

   a) Primero supondremos que son dependientes, es decir existirán números reales c_1, c_2, c_3 tales

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

o bien equivalentemente al sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & & + & 3c_3 & = & 0 \\ 2c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ 5c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} & & c_1 & = & -3c_3 \\ 2c_2 & - & 4c_3 & = & 0 \\ -c_2 & - & 14c_3 & = & 0 \end{array}$$

$$c_2 = -14c_3$$

$$-28c_3 - 4c_3 = 0 \therefore -32c_3 = 0$$

luego $\quad c_3 = 0 \; ; \; c_1 = 0 \; ; \; c_2 = 0$

Los vectores son linealmente independientes. Luego x, y, z, forman una base en E^3.

2. Determinamos e_1 en relación a esta base $[x, y, z]$

Tendremos que expresar:

$$ax + by + cz = e_1$$

o bien, equivalentemente:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

calculando a, b, c, tendremos:

$$\begin{array}{rcl|}
a + 3c & = & 1 \\
2a + 2b + 2c & = & 0 \\
5a - b + c & = & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|}
2b - 4c & = & -2 \\
-b - 14c & = & -5 \\
\hline
\end{array}$$

$$-32c = -12$$

$$c = \frac{3}{8}$$

$$b = -14\,\frac{3}{8} + 5 = \frac{-21}{4} + \frac{20}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$a = 1 - 3c = 1 - 3 \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{9}{8}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\[2ex] b = -\dfrac{2}{8} \\[2ex] c = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} -1/8 \\ -2/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}$$

3. Completar el conjunto de vectores $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ de E^4 hasta formar una base de el.

Para tener una base en E^4 será necesario encontrar otros dos vectores más, sean u, v, tales que x, y, u, v sean linealmente independientes; o bien que el sistema

$$a_1 x + + a_2 y + a_3 u + a_4 v = 0$$

lo satisfaga la solución trivial, que implica que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ tal que $[x, y, u, v]$ son linealmente independientes, y por lo tanto una base de E^4

a) Primero determinamos u:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 u = 0$$

o bien : $a_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0$

Es más fácil probar algún vector conocido si es linealmente independiente con ellos, a saber:

$$¿\text{Es } e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ una combinación lineal de } x, y?$$

... si no lo es, entonces habremos encontrado un tercer vector linealmente independiente con x, y. Procedemos así:

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{rcl|} 2a_1 - a_2 & = & 1 \\ a_1 & = & 0 \\ 3a_2 & = & 0 \\ 2a_1 + 2a_2 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

de donde se ve que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, no es posible. Luego es independiente.

Buscaremos ahora el cuarto vector. Investiguemos en la misma forma anterior con el vector e_2:

$$e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \text{ o sea}$$

$$a_1 x + a_2 y + a_3 e_1 = e_2$$

o bien:

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\2\end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

resolviendo:

$$\begin{array}{l} 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 1 \\ 3a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}$$

se observa que no existen valores a_1, a_2, a_3, luego e_2 es linealmente independiente con los vectores anteriores. Luego

$$\left[x,\ y,\ e_1,\ e_2\right] \text{ forman una base en } E^4.$$

2.5 Conos y Poliedros convexos.

Estudiaremos una combinación lineal muy importante que es bastante usada en la programación lineal.

Definición: Una combinación lineal convexa de x_1, x_2, ..., x_n es la relación $\sum_1^n c^i x_i$ en que

$$c^i \geqslant 0 \quad y \quad \sum_1^n c^i = 1$$

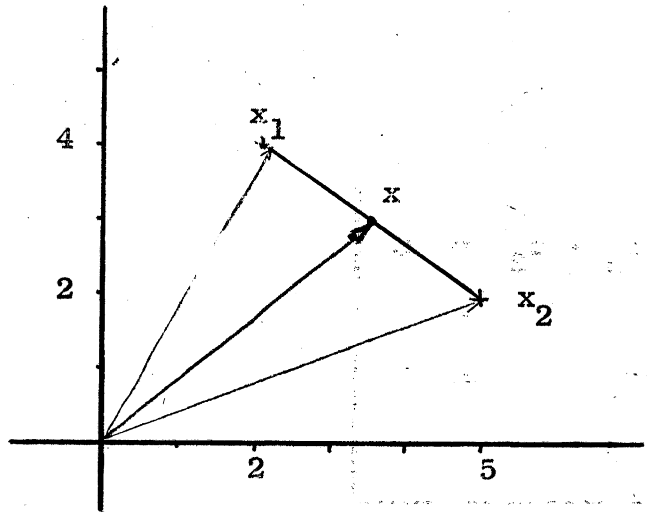
Ejemplo:

$$x = \frac{1}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_2 + \frac{2}{5} x_3$$

$$c^1 = \frac{1}{5} ; \quad c^2 = \frac{2}{5} \quad ; c^3 = \frac{2}{5}$$

en que: $\quad c^i \geqslant 0 \; ; \quad \sum_1^3 c^i = 1$

Geométricamente una combinación lineal convexa de dos vectores x_1, x_2 es otro vector ubicado en el trazo que une a a los vectores x_1 x_2.



$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$$

$$x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

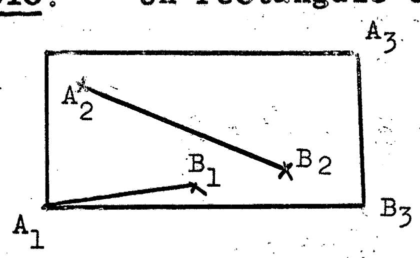
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definición: Conjunto convexo de vectores x_1, x_2, $\ldots x_n$ es un conjunto de vectores dados por la combinación lineal convexa de ellos.

Definición: Intervalo lineal de dos puntos x_1, x_2 es un conjunto de puntos dados por la combinación lineal convexa de ellos.

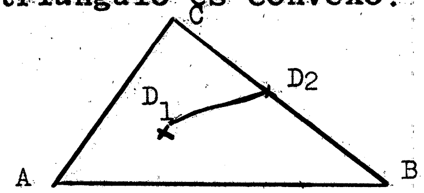
O sea, un conjunto es convexo si un par de puntos cualesquiera son puntos del conjunto y también lo es su intervalo lineal.

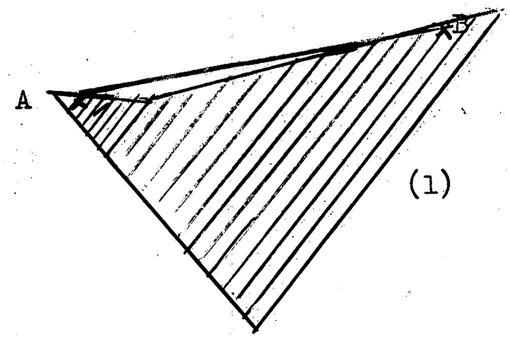
Ejemplo: Un rectángulo es un conjunto convexo:



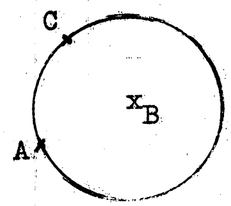
cada uno de los segmentos A_1B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 son puntos del conjunto.

Un triángulo es convexo:





Un círculo es convexo:



La figura (1) anterior no es un conjunto convexo de puntos pues el trazo A B, tiene puntos que no pertenecen a la superficie rayada.

<u>Casco de un conjunto convexo</u>.

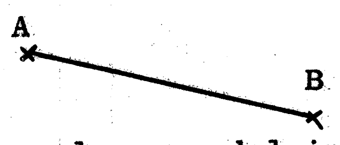
Es conveniente precisar lo que se entiende por casco, es un conjunto que cumple con dos condiciones:

1) A partir de dichos puntos se puede encontrar por combinación lineal convexa cualquier otro punto.

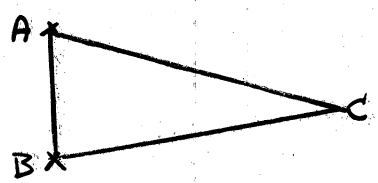
2) Al suprimir algun punto del casco el conjunto se reduce a un sub-conjunto del conjunto convexo.

Intuitivamente, el casco despliega el conjunto convexo y al suprimir alguno, el conjunto se encoje.

<u>Ejemplo</u>:



los puntos A y B forman el casco del intervalo lineal.



en el triángulo, los puntos A, B, C, forman el casco.

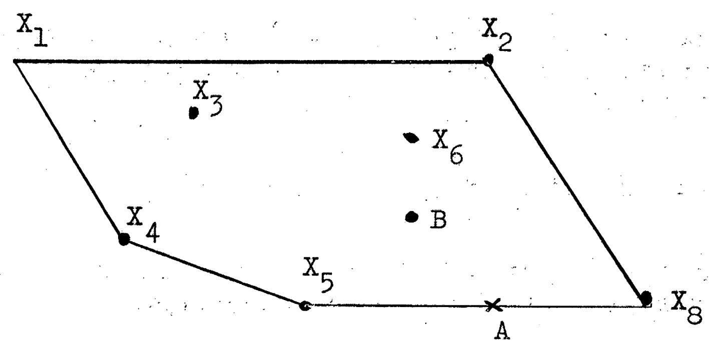
Teorema: Dado un conjunto finito de puntos x_1, x_2 ...., existe un conjunto convexo que los contiene y cualquier punto del conjunto está dado por la relación lineal.

$$y = \sum_{i=1}^{s} c^i x_i$$

en que: $c^1 \geqslant 0; \ldots; c^s \geqslant 0$ y $\sum_{1}^{s} c^i = 1$

La demostración de este teorema se encuentra en el trabajo: Programación Lineal [Ref. 2].

Ejemplo:



El conjunto formado por los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_8$ forman un conjunto convexo de casco x_1, x_2, x_4, x_5, x_8; en que cualquier punto de él, puede encontrarse por combinación lineal de ellos:

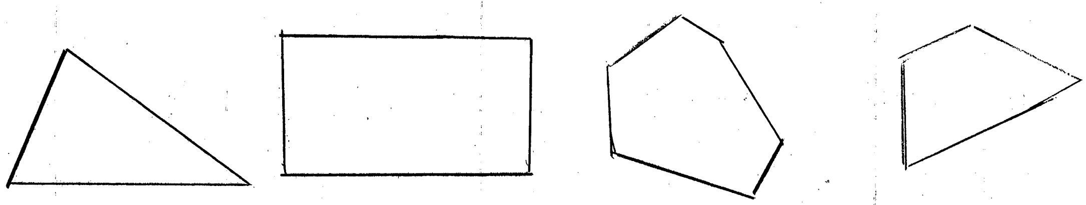
$$A = c\, x_s + (1-c)\, x_8 + 0\, (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$$

$$B = \sum_{1}^{8} c^i x_i$$

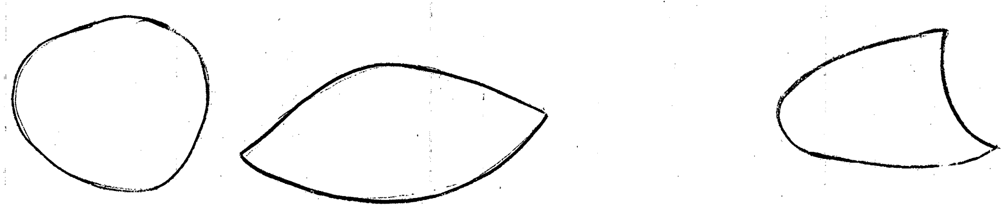
$$x_2 = 1.\, x_2 + 0\, (x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

Definición: Un poliedro convexo es un conjunto convexo de puntos cuyo casco está formado por un número finito de puntos.

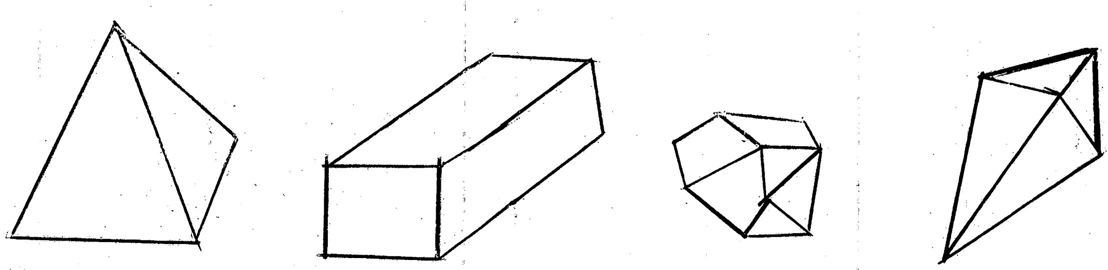
Los ejemplos anteriores han sido en su mayoría poliedros convexos, así por ejemplo:



no es poliedro cualquier curva cerrada como el círculo, la elipse, etc.:



en estos casos el casco está formado por infinitos puntos. Naturalmente, estos conceptos es necesario extenderlos a más dimensiones, así en tres dimensiones tendremos las siguientes figuras poliédricas:



Podremos concebir así con la imaginación, cuerpos poliédricos en n-dimensiones, con un conjunto finito de puntos formando el casco e hiperplanos que lo envuelven.

<u>Definición</u>: Un punto extremo o vértice es un punto que no puede expresarse como una combinación lineal convexa de otros dos puntos pertenecientes al poliedro convexo.

Definición: Un cono es una colección de puntos tales que si x es un punto del conjunto, también lo es λx para $\lambda > 0$.

La esfera, el elipsoide, cono de revolución, etc. ... no son poliedros. El ejemplo anterior se denomina cono poliédrico convexo, pues

Definición: Un cono poliédrico convexo es un cono cuyo casco es un poliedro convexo.

Definición: Arista o rayo extremo de un poliedro convexo es un rayo que no puede expresarse como una combinación lineal de otros dos rayos pertenecientes al poliedro convexo.

Teorema: Un cono poliédrico convexo es una colección de todas las combinaciones lineales:

$$y = \sum_{1}^{n} c^i x_i$$

en que $c^i \geq 0$ y los x_i son puntos fijos.

2.6 Espacio Metrizado.

Los conceptos cuantitativos en los espacios vectoriales han sido introducidos mediante el empleo del llamado producto interior entre dos vectores. En general, una métrica puede fundamentarse en cualquier conjunto asociando a todo par de elementos $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ un número real no-negativo $\rho(x_1, x_2)$, llamada la distancia entre ellos, que satisface las siguientes condiciones.

(m_1) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$

(m_2) $\rho(x_1, x_2) = 0$ si y sólo si $x_1 = x_2$

(m_3) $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) \geq \rho(x_1, x_3)$

El más familiar espacio métrico es el espacio métrico cartesiano, en que los elementos x_1, x_2, están dados por un triple:

$$x_1 = (x_1^1 , x_1^2 , x_1^3)$$

$$x_2 = (x_2^1 , x_2^2 , x_2^3)$$

en que por definición la distancia entre x_1, x_2, está dada por

$\sqrt{(x_1^1-x_2^1)^2+(x_1^2-x_2^2)^2+(x_1^3-x_2^3)^2}$

$$(x_1 - x_2) = \sqrt{\sum_1^n (x_1^i - x_2^i)^2}$$

ahora, esta función satisface obviamente (m_1) y (m_2) o empleando la desigualdad de Schwarz:

$$\left|x_1 - x_2\right| \cdot \left|x_2 - x_3\right| \geq \sum_1^n (x_1^i - x_2^i)(x_2^i - x_3^i)$$

luego:

$$\left(\left|x_1 - x_2\right| + \left|x_2 - x_3\right|\right)^2 \geq \sum + \sum + 2\sum$$
$$= \left|x_1 - x_3\right|^2$$

luego (m_3) se satisface igualmente.

Espacio de Hilbert

Otro espacio metrizado es el espacio de Hilbert (H^∞), cuyos elementos están dados por una sucesión de números reales:

$$x_1 = (x_1^1 , x_1^2 , \ldots)$$

tales que: $$\sum_{i=1}^{\infty} (x_1^i)^2 < \infty$$

o sea, que la serie sea convergente.

El producto interior definido anteriormente:

$$x \cdot y = \sum_{1}^{n} x_i \, y_i$$

que para un mismo vector x, es:

$$x \cdot y = \sum_{1}^{n} x_i^2$$

es la conocida fórmula de la longitud de x al cuadrado. Escribiremos para la longitud de x el símbolo:

Luego: $x \cdot x = |x|^2$

Propiedades de la Longitud.

Demostraremos las siguientes propiedades:

(1) $|a\,x| = |a| \cdot |x|$

(2) $|x| > |0|$ a menos que $x = 0$ en cuyo caso: $|x| = 0$

(3) $|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$ desigualdad de Schwarz

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ desigualdad triángular

Demostración: por desarrollar

Definción: Llamaremos a un vector normalizado aquel de longitud unitaria : $|x| = 1$

Distancia:

Estudiaremos algunas propiedades de la distancia en el espacio euclídeo.

Definición: La distancia entre los dos vectores x, y de un espacio vertical E, está dado por la longitud de su diferencia:

$$d\,(x\,,\,y) = |x - y|$$

Propiedades de la Distancia

Las propiedades más importantes son:

(1) $|x - x| = 0$

(1) $|x - y| > 0$

(2) $|x - y| = |y - x|$

(3) $|x - y| + |y - z| \geq |x - z|$

Demostración: a realizar por el lector interesado

Coseno del ángulo entre dos vectores:

Para definir el ángulo entre dos vectores x, y, partimos de la desigualdad de Schwarz:

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

de donde se verifica que:

$$-1 \leq \frac{(x \cdot y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

esto es el coseno de un ángulo entre 0º y π. Sea θ el ángulo comprendido entre x, y, definiremos:

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}$$

Definición: Dos vectores x, y son ortogonales si el producto interior es nulo: $x \cdot y = 0 \Rightarrow x \perp y$

Propiedades importantes:

(1) Si $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

(2) $0 \perp 0 \Rightarrow$ El vector nulo es ortogonal a si mismo

(3) Si x es ortogonal con $y_1, y_2, \ldots, y_n$, entonces

$$x \cdot (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n) = 0$$